

209 – Approximation d'une fonction par des
polynômes et des polynômes trigonométriques.
Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Qu'est-ce qu'une fonction qui satisfait les conditions de Hölder (ou hölderienne) ?

Réponse.

Une fonction f vérifiant

$$\forall x, y, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|x - y|^\alpha$$

pour $C > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$.

Question.

Que se passe-t-il si $\alpha > 1$?

Réponse.

Dans ce cas,

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq C|x - y|^{\alpha-1}$$

donc $f'(x) = 0$ pour tout x , donc f est constante.

Question.

Majorer la vitesse de convergence des polynômes de Bernstein dans le cas d'une fonction f hölderienne.

Question.

Le module de continuité est égal à

$$\omega(h) = \sup\{|f(y) - f(x)| \mid |y - x| \leq h\} \leq Ch^\alpha.$$

On en déduit

$$\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Question.

Est-ce que toute fonction continue sur \mathbb{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes ?

Réponse.

Non, en fait seuls les polynômes sont limites uniformes d'une suite de polynômes.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers f . Alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|P_n - P_N\|_\infty < 1$. Or $P_n - P_N$ est un polynôme borné, donc est constant, on a $P_n - P_N = c_n \in \mathbb{C}$. Or $P_n - P_N$ converge vers $f - P_N$ donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une constante $c = f - P_N$. D'où $f = P_N + c$ est un polynôme.