241 – Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Question.

Est-ce que le sup d'une fonction sur $\mathbb{Q}$ est le même que celui sur $\mathbb{R}$?

Réponse.

En général non, par exemple $\sup_{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 0$ et $\sup_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 1$. Par contre pour une fonction continue oui. En effet, soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $a := \sup_{\mathbb{R}} f$. Par définition de a, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) - \varepsilon < f(b)$. Or f est continue en b donc il existe $\eta > 0$ tel que $|x - b| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Soit alors $x \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - b| < \eta$ (existe par densité de $\mathbb{Q}$), alors $f(b) - f(x) < \varepsilon$ donc $f(a) - \varepsilon < f(x) + \varepsilon$, d'où $f(a) - 2\varepsilon < f(x)$.
D'autre part, a est bien un majorant de f sur $\mathbb{Q}$, donc $a = \sup_{\mathbb{Q}} f$.

Question.

Si on affaiblit les hypothèses du deuxième théorème de Dini, est-ce que vous connaissez des contre-exemples ? On rappelle le deuxième théorème de Dini : soit (f_n) une suite de fonctions croissantes sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Réponse.

Si on ne suppose pas que les fonctions sont définies sur un segment : on considère $f_n : x \mapsto x^n$ définie sur $[0,1[$, alors chaque f_n est croissante et (f_n) converge simplement vers 0 mais pas uniformément.
Si on ne suppose pas que les fonctions sont croissantes : on définit la fonction affine par morceaux f_n qui vaut 1 en $\frac{1}{n}$, 0 en 0 et 0 en $\frac{2}{n}$. Alors (f_n) converge simplement vers 0 mais pas uniformément.
Par contre, le théorème reste valable sur un compact.

Question.

Et pour le premier théorème de Dini ? On rappelle ce théorème : soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues définies sur $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Réponse.

Si on ne suppose pas f_n continue : on définit f_n sur $[0,1]$ de la façon suivante : $f_n(0) = 1, f_n(x) = 1$ pour $x \geq \frac{1}{n}$, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ et f_n affine sur $]0, \frac{1}{n}]$. Alors (f_n) converge simplement vers 1 continue mais pas uniformément.

Question.

Si on impose des hypothèses de régularité sur f, est-ce qu'on peut dire quelque chose sur la convergence de $\hat{f}(n)$?

Réponse.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $f_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Question.

Réciproquement, si $f_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, est-ce qu'on peut dire quelque chose sur la régularité de f ?

Réponse.

Pour $k \geq 2$ oui, f est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

Question.

Soit f_n définie sur $X \subset \mathbb{R}$ mesurable, $f_n \geq 0$ et telle que (f_n) converge en décroissant vers une fonction f. Est-ce qu'on a $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Réponse.

Non, on prend $f_n := \frac{1}{n}$, alors $\int_{\mathbb{R}} f_n = +\infty$ et $f_n \to 0$ d'intégrale nulle.

Question.

Si on suppose qu'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit d'intégrale finie ?

Réponse.

C'est vrai parce qu'à partir de n_0, les intégrales sont finies (car $f_n \geq 0$ et (f_n) est décroissante), donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée avec f_{n_0} (on peut aussi appliquer le théorème de convergence monotone sur $f_{n_0} - f_n$).

Question.

Est-ce que cette condition est nécessaire ?

Réponse.

Non, il suffit de prendre une suite constante de fonctions d'intégrale nulle.