261 – Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Soit X_i des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Déterminer la loi de Z.

Réponse.

Calculons la fonction caractéristique de Z.

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \mathbb{E}(e^{itZ}) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{N} e^{itX_j}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{N} e^{itX_j} \mid N\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{N} \varphi_{X_j}(t)\right) \\
&= \mathbb{E}(\varphi_{X_1}(t)^N) \\
&= \mathbb{E}((1-p+pe^{it})^N) \\
&= G_N(1-p+pe^{it}) \\
&= e^{\lambda p(e^{it}-1)},
\end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique d'une variable suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Question.

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe c tel que $\varphi_X(c) = 1$.

Réponse.

$\varphi_X(2\pi) = \mathbb{E}(e^{2i\pi}) = 1$.

Question.

Soit X une v.a. à valeurs dans $a + b\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$.

Réponse.

On pose $X = a + bY$,

$$|\varphi_X(c)| = |\mathbb{E}(e^{ic(a+bY)})| = |e^{ica}\mathbb{E}(e^{icbY})|.$$

On pose donc $c := \frac{2\pi}{b}$.

Question.

Montrer que s'il existe $c \neq 0$ tel que $|\varphi_X(c)| = 1$, alors X est à valeurs dans $a + b\mathbb{Z}$.

Réponse.

On a

$$|\varphi_X(c)| = |\mathbb{E}(e^{icX})| = 1$$

et

$$|\varphi_X(c)| \leq \mathbb{E}(|e^{icX}|) = 1$$

donc $|\mathbb{E}(e^{icX})| = \mathbb{E}(|e^{icX}|)$. Montrons que cX est constant modulo 2π. Pour f intégrable, tel que $|\int f| = \int |f|$, il existe α tel que

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}x\right| &= e^{i\alpha} \int f \,\mathrm{d}x \\ &= \int e^{i\alpha} f \,\mathrm{d}x \\ &= \Re\left(\int e^{i\alpha} f \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int \Re(e^{i\alpha} f) \,\mathrm{d}x \\ &= \int |f| \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On a donc $|f| = \Re(e^{i\alpha} f)$ car $|f| - \Re(e^{i\alpha}) \geq 0$. On en déduit que l'argument de f est constant.

On a donc que $cX \equiv \theta[2\pi]$, d'où $X \in \frac{\theta}{c} + \frac{2\pi}{c}\mathbb{Z}$.

Question.

Montrer que s'il existe $c, d \neq 0$ avec $\frac{c}{d} \notin \mathbb{Q}$ tels que $|\varphi_X(c)| = |\varphi_X(d)| = 1$, alors X est constante.

Réponse.

Supposons X non constante, alors par la question précédente il existe $k_1 \neq k_2$ et $l_1 \neq l_2$ tels que

$$\begin{cases} \frac{\theta}{c} + \frac{2\pi}{c} k_1 = \frac{\theta'}{d} + \frac{2\pi}{d} l_1 \\ \frac{\theta}{c} + \frac{2\pi}{c} k_2 = \frac{\theta'}{d} + \frac{2\pi}{d} l_2. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{2\pi}{c}(k_1 - k_2) = \frac{2\pi}{d}(l_1 - l_2),$$

or $\frac{c}{d} \notin \mathbb{Q}$, donc c'est absurde.