264 – Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

2013 – 2014

Question.

Déduire du théorème de Le Cam qu'une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n>\lambda}$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Réponse.

On a, par le théorème de Le Cam,

$$|\mathbb{P}(S_n = k) - P(Z = k)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{\lambda^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Question.

Peut-on le démontrer autrement ?

Réponse.

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

On a $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ et $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \sim e^{-\lambda}$. D'où

$$\mathbb{P}(S_n = k) \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

d'où le résultat.

On peut aussi utiliser les fonctions caractéristiques.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itS_n}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \left(1-\frac{\lambda}{n}(1-e^{it})\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda(1-e^{it})}\end{aligned}$$

et si $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itZ}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= e^{-\lambda(1-e^{it})}.\end{aligned}$$

Le résultat vient du théorème de Lévy.

Question.

Pourquoi une somme de variables aléatoires de Bernoulli est une variable aléatoire binomiale ?

Réponse.

Soit $X = X_1 + \ldots + X_n$, avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \binom{n}{k}\mathbb{P}(X_1=1,\ldots,X_k=1,X_{k+1}=0,\ldots,X_n=0)\\ &= \binom{n}{k}\mathbb{P}(X_1=1)\cdots\mathbb{P}(X_k=1)\mathbb{P}(X_{k+1}=0)\cdots\mathbb{P}(X_n=0),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

On peut aussi utiliser les fonctions génératrices. Pour $s \in \,]-1,1[$, on pose

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n\mathbb{P}(X=n)$$

par le théorème de transfert. On a donc, si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$,

$$\begin{aligned}G(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} s^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= (ps+1-p)^n\end{aligned}$$

La fonction génératrice d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est donc $s \mapsto ps+1-p$, d'où le résultat.

Question.

On considère un scrutin avec deux participants A et B, où A a obtenu a votes et B a obtenu b votes. On suppose $a > b$. Calculer la probabilité que A reste en tête des votes tout au long du dépouillement.

Réponse.

On note $X_i := 1$ si le i^e bulletin est pour A et -1 sinon. On note

$$N_{x,y}(n) = \text{card}\{\text{trajectoires allant de } x \text{ à } y \text{ en } n \text{ étapes}\}.$$

Alors si α désigne le nombre de fois où on fait $+1$, $N_{x,y}(n) = \binom{n}{\alpha}$ ou 0. En utilisant le fait que $\alpha + \beta = n$ et $\alpha - \beta = y - x$, où β désigne le nombre de -1, on obtient $\alpha = \frac{y-x+n}{2}$ lorsque ceci est entier. On a donc

$$N_{x,y}(n) = \binom{n}{\frac{y-x+n}{2}}$$

lorsque ceci a un sens.

On note maintenant

$$N^*_{x,y}(n) = \text{card}\{\text{trajectoires allant de } x \text{ à } y \text{ en } n \text{ étapes qui touchent } 0\}.$$

Par un argument de symétrie, on a $N^*_{x,y}(n) = N_{-x,y}(n)$, d'où

$$N^*_{x,y}(n) = \binom{n}{\frac{n+y+x}{2}}.$$

On doit alors avoir que le premier vote est pour A et on doit compter le nombre de trajectoires entre 1 et $a - b$ qui ne touchent pas 0. Ce nombre de trajectoires est

$$N_{1,a-b}(n-1) - N^*_{1,a-b}(n-1) = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{a-b}{a+b}$.