

# Racine carrée d'une matrice symétrique réelle positive

2012-2013

## Proposition.

Soit  $H \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

Alors il existe une unique matrice  $R \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $H = R^2$ .

*Démonstration.*

– Existence :  $H$  est symétrique réelle donc il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que :

$${}^tPHP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ .

On pose  $S := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , on a  $S^2 = D$ .

Alors  $R := PS^tP \in S_n^+(\mathbb{R})$  et  $R^2 = H$ .

– Unicité : Soit  $R \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $R^2 = H$ .

Soient  $r$  et  $h$  les endomorphismes associés dans la base canonique,  $h$  est autoadjoint et  $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+$ .

On note  $E_{\lambda_i}$  les sous-espaces propres correspondants à  $h$ , alors  $r$  commute avec  $h$  car  $r^2 = h$ , donc  $E_{\lambda_i}$  est stable par  $r$ .

On note  $r_i = r|_{E_{\lambda_i}}$ , on a  $r_i^2 = \lambda_i \text{id}_{E_{\lambda_i}}$ .

Donc si  $\mu \in Sp(r_i)$ ,  $\mu^2 = \lambda_i$ , donc  $\mu = \sqrt{\lambda_i}$  (car  $r_i$  est autoadjoint positif).

$r_i$  n'a qu'une seule valeur propre et est diagonalisable, donc  $r_i = \sqrt{\lambda_i} \text{id}_{E_{\lambda_i}}$ .  $\square$