Variables de Rademacher

Akita

ENS Rennes, 2013-2014

Références : *Théorie des probabilités*, Candelpergher,
Analyse pour l'agrégation, Zuily-Queffélec (pour Khintchine).

Développement pour les leçons :
- 249. Suites de variables de Bernoulli indépendantes.
- 261. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
- 262. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
- 263. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
- 264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Résultats :

Après avoir défini les variables de Rademacher, on montre quelques résultats :

1. une formule d'analyse : $\prod \cos(t/2^k) = \sin(t)/t$,
2. les variables de Rademacher forment un système orthonormé dans $L^2(\Omega)$,
3. un cas particulier de la loi des grands nombres,
4. l'inégalité de Khintchine,
5. un exemple de va à densité non indépendantes et de covariance nulle.

Soit l'espace probabilisé $\Omega := [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ.

Définition : Pour X une va de Bernoulli, on définit $R := (-1)^X = 1 - 2X$. R est appelé une *variable de Rademacher*. Autrement dit, la loi d'une variable de Rademacher est $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

1. Résultat d'analyse :

On sait (développement dyadique) que tout $\omega \in \Omega$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\omega = \sum_{n \geq 1} \frac{X_n(\omega)}{2^n},$$

où les $X_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[1/2^n, 1/2^{n-1}[}$ sont des va de Bernoulli indépendantes. Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{R_n(\omega)}{2^n} = 1 - 2\omega.$$

Autrement dit, la suite (Y_n) définie par

$$Y_n := \sum_{k \geq 1}^{n} \frac{R_k}{2^k}$$

converge presque partout (en fait sur tout Ω) vers la va définie par $Y : \omega \mapsto 1 - 2\omega$. Comme la convergence presque partout implique la convergence en loi et donc la convergence simple des fonctions caractéristiques, on obtient :

$$\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t) = \int_{[0,1]} e^{it(1-2\omega)} d\omega = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{si } t \neq 0, \\ 1, & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Or :

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{it \sum \frac{R_k}{2^k}}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{it \frac{R_k}{2^k}}) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

D'où le résultat d'analyse suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

Application : ?

2. Famille orthonormale :

Les R_n sont des va indépendantes donc :

$$\text{pour } n \neq p, \int_{[0,1]} R_n R_p d\lambda = \mathbb{E}(R_n R_p) = \mathbb{E}(R_n)\mathbb{E}(R_p) = 0,$$

$$\text{pour } n = p, \int_{[0,1]} (R_n)^2 d\lambda = \int\limits_{[0,1]} 1 d\lambda = 1.$$

Ainsi, les R_n forment un système orthonormé dans $L^2(\Omega)$.

Application : la démonstration du point 3.

3. Loi des grands nombres :

On note $T_n := \dfrac{R_1 + \cdots + R_n}{n}$. On a :

$$(T_n)^2 = \frac{R_1^2 + \cdots + R_n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} R_i R_j,$$

d'où :

$$\mathbb{E}((T_n)^2) = \frac{\mathbb{E}((R_1)^2) + \cdots + \mathbb{E}((R_n)^2)}{n^2} = \frac{1}{n},$$

et donc, d'après le théorème de Beppo-Levi, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{p \geq 1} (T_{p^2})^2\right) = \sum_{p \geq 1} \mathbb{E}((T_{p^2})^2) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} < +\infty.$$

$\sum\limits_{p \geq 1} (T_{p^2})^2$ est positive et d'intégrale finie, la série converge donc presque sûrement et son terme général tend vers 0 presque sûrement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^2 \leq n < (p+1)^2$ et alors :

$$\begin{aligned} |R_1 + \cdots + R_n| &\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + |R_{p^2+1}| + \cdots + |R_n| \\ &\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + n - p^2 \\ &\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + (p+1)^2 - p^2 \\ &\leq |R_1 + \cdots + R_{p^2}| + 2p \end{aligned}$$

D'où : $|T_n| \leq |T_{p^2}| + 2/p$ et donc $T_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne :

$$\frac{R_1 + \cdots + R_n}{n} \to 0 = \mathbb{E}(R_1) \quad \text{et} \quad \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X_1).$$

4. Inégalité de Khintchine :

Proposition :

Soient $R_1, \ldots, R_n$ des variables de Rademacher indépendantes. Soit $f \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(R_1, \ldots, R_n)$. Alors $\mathbb{E}(f^2) \leq e\mathbb{E}(|f|)^2$.

preuve :

On écrit : $f = \sum a_j R_j$ et quitte à normaliser on suppose que $\mathbb{E}(f^2)^2 = 1 = \sum a_j^2$. On pose $g := \prod_{j=1}^{n} (1 + ia_j R_j)$. Alors pour presque tout ω :

$$\begin{aligned}
|g(\omega)| &= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2 R_j(\omega)^2} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2} \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\exp(a_j^2)} \\
&\leq \sqrt{\exp(\sum a_j^2)} \\
&\leq \sqrt{e},
\end{aligned}$$

d'où : $||g||_\infty \leq \sqrt{e}$. En outre, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_j g) &= \mathbb{E}(R_j(1 + ia_j R_j)) \prod_{k \neq j} \mathbb{E}(1 + ia_k R_k), \text{ par indépendance des } R_k, \\
&= ia_j, \text{ car } \mathbb{E}(R_1) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(R_1^2) = 1.
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(fg) = \sum a_j \mathbb{E}(R_j g)$, donc $|\mathbb{E}(fg)| = 1$, ce qui permet de conclure :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(f^2) &= 1 \\
&= |\mathbb{E}(fg)|^2 \\
&\leq \mathbb{E}(|fg|)^2 \\
&\leq \mathbb{E}(|f|)^2 ||g||_\infty^2 \\
&\leq e\mathbb{E}(|f|)^2
\end{aligned}
$$

Application : le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein.

5. Un exemple de va à densité non indépendantes et de covariance nulle :

Soit N une va de loi normale centrée réduite. Soit R une va de loi de Rademacher indépendante de N. On considère $Y := RN$. On a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(N \leq x \text{ et } R = 1) + \mathbb{P}(-N \leq x \text{ et } R = -1) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-N \leq x), \text{ par indépendance de } N \text{ et } R, \\
&= \mathbb{P}(N \leq x), \text{car } N \text{ et } -N \text{ ont même loi.}
\end{aligned}
$$

Donc Y est une va de loi normale centrée réduite. Puis :

$$
\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(X^2) = 0.
$$

Aussi les va X et Y sont non corrélées. Si X et Y étaient indépendantes alors (X, Y) serait un vecteur gaussien or :

$$
\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(R = -1) = \frac{1}{2}, \text{ car } X \neq 0 \ \mathbb{P} - \text{ps},
$$

donc $X + Y$ n'est pas gaussienne.