

# Rapport de Stage : Graphe de Cayley et Espace des Bouts des Groupes de Type Fini

Marceau Ringuedé

Sous la tutelle de Frédéric Haglund

---

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Graphe de Cayley</b>	<b>4</b>
1.1 Fonctions longueur et distance . . . . .	4
1.2 Graphe de Cayley . . . . .	5
<b>2 Quasi-isométries</b>	<b>11</b>
2.1 Définition et premières propriétés . . . . .	11
2.2 Lemme de Švarc-Milnor . . . . .	13
<b>3 Espace des bouts</b>	<b>19</b>
3.1 Définition de l'espace des bouts . . . . .	19
3.2 Propriétés de l'espace des bouts . . . . .	21
3.3 Bouts des Groupes . . . . .	25
<b>4 Groupe agissant sur un arbre</b>	<b>28</b>
4.1 Groupe Libre . . . . .	28
4.2 Produit Libre Amalgamé . . . . .	33
4.3 Cas particulier du théorème de Stallings . . . . .	37
<b>5 Références</b>	<b>42</b>

# Introduction

Dans ce document, nous allons étudier les notions de **Graphe de Cayley** et d'**Espace des Bouts** des groupes de type fini. On peut considérer ce travail comme une introduction à la théorie géométrique des groupes. Le principe de cette théorie est d'étudier les groupes de type fini à travers les connexions entre les propriétés algébriques de ces groupes et les propriétés topologiques et géométriques des espaces sur lesquels ils opèrent. Une autre idée importante de cette théorie est d'associer à chaque groupe de type fini un objet géométrique puis d'extraire des informations sur ce groupe à l'aide de l'étude de cet objet géométrique. Le **Graphe de Cayley** d'un groupe de type fini, que l'on introduira dans la première partie de ce rapport, sera l'objet géométrique à travers lequel on étudiera les groupes.

Cependant, nous verrons à la fin de la première partie que la définition du **Graphe de Cayley** d'un groupe de type fini dépend du choix du système de générateurs de ce groupe. Néanmoins, lorsque l'on change le système de générateurs, le graphe de Cayley du groupe change mais ressemble beaucoup « vu de loin » au graphe initial. Dans la deuxième partie de ce rapport nous formaliserons l'idée floue de « ressemblance vu de loin » en introduisant la notion de **quasi-isométrie** entre espaces métriques. Cette relation d'équivalence entre espaces métriques va nous permettre d'étudier un groupe à travers son graphe de Cayley même si on perdra au passage certains détails. En effet, dans la démarche que l'on suivra, on ne distinguera pas les groupes quasi-isométriques entre eux, c'est en particulier le cas pour les groupes finis.

Dans la troisième partie de ce rapport, nous introduirons un premier invariant de **quasi-isométrie**. Ce sera l'**Espace des bouts** d'un espace topologique. Cette notion correspond intuitivement aux « composantes connexes à l'infini » de l'espace. Nous verrons ensuite comment l'étude de l'espace des bouts du graphe de Cayley d'un groupe de type fini peut nous donner des renseignements sur le groupe. Pour cela nous montrerons (partiellement) le **Théorème de Stallings**.

Dans la quatrième et dernière partie, on introduira certains outils de la théorie de Bass-Serre sur les arbres pour montrer un cas particulier du **Théorème de Stallings**. On définira ainsi ce que sont les **produits libres amalgamés** et nous caractériserons la façon dont ces groupes agissent sur les arbres. On montrera grâce à cela, pourquoi les produits libres amalgamés ont une infinité de bouts.

# 1 Graphe de Cayley

Le but de cette partie va être de munir les groupes de type fini d'une structure géométrique et donc en particulier d'une distance. On définira cette distance dans une première sous-partie. On introduira ensuite la notion fondamentale de graphe de Cayley d'un groupe de type fini après avoir rappelé quelques définitions et propriétés élémentaires sur les graphes en général. Les graphes de Cayley nous permettront dans les prochaines parties de manipuler les groupes comme des objets géométriques et d'en déduire des propriétés intéressantes.

Dans toute la suite de cette partie, on considère  $G$  un groupe de type fini,  $S$  un ensemble de générateurs de  $G$ . On supposera toujours que  $S$  ne contient pas l'élément neutre  $1_G$  de  $G$  et que  $S$  est symétrique, c'est-à-dire que pour tout  $s \in S$  son inverse  $s^{-1}$  dans  $G$  est aussi dans  $S$ .

## 1.1 Fonctions longueur et distance

Par définition de  $S$  comme partie génératrice de  $G$  (et comme  $S$  est symétrique), on sait que tout élément  $g \in G$  peut s'écrire comme  $g = s_1 \dots s_n$  avec  $s_i \in S$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , cela motive donc la définition suivante.

**Définition 1.1.** Soit  $g$  un élément du groupe  $G$  engendré par  $S$ , on note  $\ell_S(g)$  le nombre minimal d'éléments de  $S$  nécessaire pour écrire  $g$ . On appellera  $\ell_S$  la **fonction longueur** de  $G$  relativement à  $S$ . On dira aussi que toute expression de  $g$  sous la forme  $g = s_1 s_2 \dots s_{\ell_S(g)}$  avec  $s_i \in S$  pour  $i \in \{1, \dots, \ell_S(g)\}$  est une **expression réduite** de  $g$ .

On peut maintenant établir quelques propriétés élémentaires de la fonction longueur :

**Proposition 1.2.** Pour tous  $g, g' \in G$  et  $s \in S$  on a :

- (L1)  $\ell_S(g) = \ell_S(g^{-1})$ .
- (L2)  $\ell_S(g) = 1 \Leftrightarrow g \in S$ .
- (L3)  $\ell_S(gg') \leq \ell_S(g) + \ell_S(g')$ .
- (L4)  $\ell_S(gg') \geq \ell_S(g) - \ell_S(g')$ .
- (L5)  $\ell_S(g) - 1 \leq \ell_S(gs) \leq \ell_S(g) + 1$ .

*Démonstration.*

- (L1) Soit  $g = s_1 s_2 \dots s_{\ell_S(g)}$  une expression réduite de  $g$ , alors  $s_{\ell_S(g)}^{-1} s_{\ell_S(g)-1}^{-1} \dots s_1^{-1}$  est une expression réduite de  $g^{-1}$  car on a bien  $g s_{\ell_S(g)}^{-1} s_{\ell_S(g)-1}^{-1} \dots s_1^{-1} = 1$ . De plus, s'il existe une expression de longueur strictement inférieure pour  $g^{-1}$  alors par symétrie, il en existe une aussi pour  $g$  donc on aurait une contradiction.
- (L2) Par définition, si  $\ell_S(g) = 1$  alors il existe  $s \in S$  tel que  $g = s$ .
- (L3) Si  $g = s_1 \dots s_{\ell_S(g)}$  et  $g' = s'_1 \dots s'_{\ell_S(g')}$  alors le produit  $gg' = s_1 \dots s_{\ell_S(g)} s'_1 \dots s'_{\ell_S(g')}$  a une longueur au plus  $\ell_S(g) + \ell_S(g')$ .
- (L4) On a par (L3) :  $\ell_S(g) = \ell_S(gg'(g')^{-1}) \leq \ell_S(gg') + \ell_S((g')^{-1})$  puis par (L1) cela équivaut à :  $\ell_S(g) - \ell_S(g') \leq \ell_S(gg')$ .
- (L5) On applique directement (L3) et (L4) à  $\ell_S(gs)$  et on obtient par (L2) :  $\ell_S(g) - 1 \leq \ell_S(gs) \leq \ell_S(g) + 1$ . □

Maintenant que l'on a défini cette fonction longueur, on va pouvoir définir une distance sur  $G$  de la façon suivante :

**Définition 1.3.** Soient  $g$  et  $g'$  deux éléments de  $G$ , on note  $d_S(g, g')$  la **distance par rapport à  $S$**  entre  $g$  et  $g'$  que l'on définit de la façon suivante :  $d_S(g, g') = \ell_S(g^{-1}g')$ .

Ceci nous amène à la proposition suivante :

**Proposition 1.4.** La fonction  $d_S$  définit une distance sur  $G$  invariante par translation à gauche de  $G$ .

*Démonstration.*

- Symétrie : Soient  $g_1, g_2 \in G$  on a par la propriété (L1) :

$$d_S(g_1, g_2) = \ell_S(g_1^{-1}g_2) = \ell_S((g_1^{-1}g_2)^{-1}) = \ell_S(g_2^{-1}g_1) = d_S(g_2, g_1)$$

- Séparation : Soient  $g_1, g_2 \in G$  si  $d_S(g_1, g_2) = 0$  alors  $\ell_S(g_1^{-1}g_2) = 0$  donc  $g_1^{-1}g_2 = 1_G$  et ainsi  $g_1 = g_2$ .
- Inégalité triangulaire : Soient  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , on a par la propriété (L3) :

$$d_S(g_1, g_2) = \ell_S(g_1^{-1}g_2) = \ell_S(g_1^{-1}g_3g_3^{-1}g_2) \leq \ell_S(g_1^{-1}g_3) + \ell_S(g_3^{-1}g_2) = d_S(g_1, g_3) + d_S(g_3, g_2)$$

- Invariance par translation à gauche : Soient  $g_1, g_2, g_3 \in G$  on a :

$$d_S(g_3g_1, g_3g_2) = \ell_S(g_1^{-1}g_3^{-1}g_3g_2) = \ell_S(g_1^{-1}g_2) = d_S(g_1, g_2)$$

□

On peut cependant une critique fondamentale à cette distance, elle dépend du choix du système de générateurs. Pour répondre à cette critique nous allons dans un premier temps introduire la notion de **Graphe de Cayley** d'un groupe de type fini ainsi que sa réalisation géométrique. Puis dans un second temps, nous introduirons la notion de **quasi-isométrie**.

## 1.2 Graphe de Cayley

Une façon classique de considérer un groupe de type fini comme un objet géométrique est de construire son **graphe de Cayley** et c'est cela que nous allons faire dans cette sous-partie.

On rappelle tout d'abord quelques définitions et propriétés élémentaires sur les graphes.

**Définition 1.5.** Un **graphe** est une paire  $\Gamma = (V, E)$  d'ensembles disjoints et de deux applications :

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & V \times V \\ e & \mapsto & (o(e), t(e)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ e & \mapsto & \bar{e} \end{array}$$

Vérifiant que pour tout  $e \in E$  on a  $\bar{\bar{e}} = e$ ,  $\bar{e} \neq e$  et  $o(e) = t(\bar{e})$ .

On appelle un élément  $v \in V$  un **sommet** du graphe, un élément  $e \in E$  une **arête orientée** et  $\bar{e}$  l'arête **inverse** de  $e$ . Le sommet  $o(e) = t(\bar{e})$  s'appelle **l'origine** de  $e$  et le sommet  $t(e) = o(\bar{e})$  s'appelle le **sommet terminal** de  $e$ . Ces deux sommets sont les **extrémités** de  $e$ .

On peut aussi définir la notion de graphe orienté de la manière suivante :

**Définition 1.6.** Une **orientation** d'un graphe  $\Gamma = (V, E)$  est une partie  $E_+$  de  $E$  telle que  $E = E_+ \sqcup \bar{E}_+$ . Il en existe toujours. Un **graphe orienté** est défini, à isomorphisme près, par la donnée de deux ensembles  $V$  et  $E_+$ , et d'une application  $E_+ \rightarrow V \times V$ . Le graphe correspondant a pour ensemble d'arêtes  $E = E_+ \sqcup \bar{E}_+$ , où  $\bar{E}_+$  est une copie de  $E_+$ .

**Définition 1.7.** Soient  $X$  un ensemble et  $S$  un ensemble de parties à deux éléments de  $X$ . On associe à ces deux ensembles le graphe ayant pour ensemble de sommets  $X$  et pour arêtes les couples  $(v, v') \in X \times X$  tels que  $v \neq v'$  et  $\{v, v'\} \in S$ , avec  $\overline{(v, v')} = (v', v)$ ,  $o(v, v') = v$  et  $t(v, v') = v'$ . On dit qu'un graphe défini de cette façon est un **graphe simplicial** (et donc plus généralement un graphe). Dans un tel graphe, deux arêtes qui ont la même origine et le même sommet terminal sont égales.

**Remarque.** Dans les trois premières parties de ce rapport, on utilisera principalement la notion de graphe simplicial. Lorsque l'on travaillera avec ces objets, on identifiera une arête  $e$  à la paire d'éléments  $\{o(e), t(e)\}$  et inversement. Par abus de notation on pourra ainsi écrire «  $\{v, v'\} \in E$  » à la place de « il existe  $e \in E$  tel que  $o(e) = v$  et  $t(e) = v'$  ».

**Définition 1.8.** Soit  $(V, E)$  un graphe :

- On dit que deux sommets  $v, v' \in V$  sont **adjacents** si ils sont reliés par une arête, c'est-à-dire qu'il existe  $e \in E$  tel que  $o(e) = v$  et  $t(e) = v'$ .
- On appelle **degré** de  $v \in V$  le nombre d'arêtes orientées d'origine  $v$ .

À l'instar d'autres structures algébriques, on peut définir la notion de morphisme de graphe de la manière suivante :

**Définition 1.9.** Soient  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes. Un **morphisme de graphe**  $f$  entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est la donnée de deux applications  $f_V : V_1 \mapsto V_2$  et  $f_E : E_1 \mapsto E_2$  vérifiant :  $(o(f_E(e)), t(f_E(e))) = (f_V(o(e)), f_V(t(e)))$  pour tout  $e \in E$  et  $\overline{f_E(e)} = f_E(\bar{e})$ . On dit que le morphisme  $f$  est une injection (respectivement surjection) si  $f_V$  et  $f_E$  sont injectives (respectivement surjectives). Si le morphisme de graphe  $f$  est une injection et une surjection et que les réciproques de  $f_V$  et  $f_E$  donnent aussi un morphisme de graphe alors  $f$  est un isomorphisme de graphe. Si  $f$  est un isomorphisme d'un graphe dans lui-même on dit que c'est un automorphisme.

On peut définir une notion analogue pour les graphes simpliciaux.

**Définition 1.10.** Soient  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  deux **graphes simpliciaux**. Un **morphisme simplicial** entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est une application  $f : V_1 \rightarrow V_2$  qui envoie les arêtes de  $\Gamma_1$  sur les arêtes de  $\Gamma_2$  c'est-à-dire que pour tout  $\{v, v'\} \in E_1$ ,  $\{f(v), f(v')\} \in E_2$ . On dit que le morphisme  $f$  est une injection (respectivement surjection) si  $f$  est injective (respectivement surjective). Si le morphisme  $f$  est une injection et une surjection et que sa réciproque est aussi un morphisme on dit que  $f$  est un isomorphisme. Si  $f$  est un isomorphisme d'un graphe dans lui-même on dit que c'est un automorphisme.

**Remarque.** Un morphisme simplicial induit un morphisme de graphe. En effet, il suffit de poser  $f_V = f$  et  $f_E : E_1 \rightarrow E_2$  le morphisme qui associe à l'arête  $e \in E_1$  caractérisée par  $\{o(e), t(e)\}$  l'arête de  $E_2$  caractérisée par  $\{f(o(e)), f(t(e))\}$  qui existe (par définition de  $f$ ) et qui est unique (car  $\Gamma_2$  est un graphe simplicial).

On peut associer à tout graphe (et donc à tout graphe simplicial) une réalisation géométrique de la manière suivante :

**Définition 1.11.** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe. On considère la somme disjointe de  $V$  et de  $E \times [0, 1]$  où  $V$  et  $E$  sont munis de la topologie discrète et  $[0, 1]$  de la topologie usuelle, c'est un espace topologique. Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence la plus fine pour laquelle  $(e, t) \mathcal{R} (\bar{e}, 1 - t)$ ,  $(e, 0) \mathcal{R} o(e)$  et  $(e, 1) \mathcal{R} t(e)$  pour  $e \in E$ . On quotiente ensuite l'espace par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  on note cet ensemble  $\text{real}(\Gamma)$ . On muni  $\text{real}(\Gamma)$  de la topologie quotient (c'est à dire la topologie la plus fine pour laquelle l'application naturelle entre l'espace de départ et  $\text{real}(\Gamma)$  est continue). On dit que  $\text{real}(\Gamma)$  muni de cet topologie est la **réalisation géométrique** de  $\Gamma$ .

**Remarque.** La définition ci-dessus est le moyen formel de dire que l'on a rendu les arêtes du graphe homéomorphes à l'intervalle  $[0, 1]$  et que l'on a identifié les extrémités des arêtes (c'est-à-dire les points correspondant à 0 et 1) avec les sommets qu'ils joignent.

On peut aussi introduire les notions géométriques de **chemin**, de **connexité** et de **cycle** dans les graphes.

**Définition 1.12.** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe :

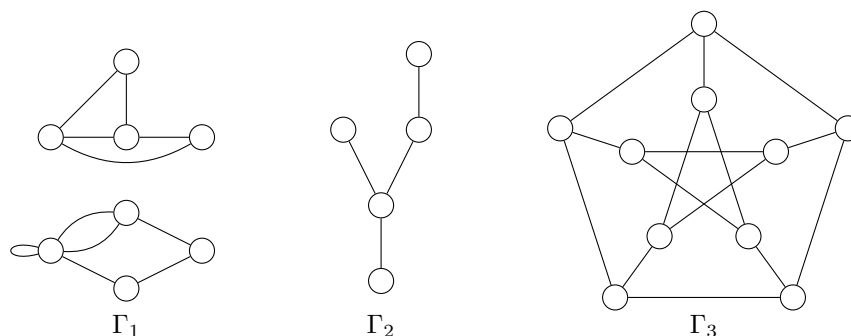
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Un **chemin** de longueur  $n$  de  $\Gamma$  est une suite d'arêtes  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  vérifiant pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  on ait  $t(e_i) = o(e_{i+1})$ ,  $v = o(e_1)$  et  $v' = t(e_n)$ . On dit que le chemin relie  $o(e_1)$  et  $t(e_n)$ . Pour les graphes simpliciaux un chemin est uniquement défini par les sommets qu'il traverse.
- Dans un chemin  $(e_1, \dots, e_n)$ , un couple de la forme  $(e_i, e_{i+1}) = (e_i, \bar{e}_i)$  s'appelle un **aller-retour**. Il nous permet de construire un autre chemin  $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+2}, \dots, e_n)$  avec les mêmes extrémités. Par récurrence, on en déduit que si il existe un chemin de  $v$  à  $v'$  dans  $\Gamma$  il en existe un sans aller-retour.
- On dit que le graphe  $\Gamma$  est **connexe** si pour tous  $v, v' \in V$  il existe un chemin reliant  $v$  et  $v'$ .
- Un **sous-graphe** de  $\Gamma$  est un graphe  $\Gamma' = (V', E')$  avec  $V' \subset V$  et  $E' \subset E$  et tel que pour tout  $e \in E'$ ,  $\bar{e} \in E'$ .
- Les sous-graphes connexes maximaux (pour la relation d'inclusion) sont appelés les **composantes connexes du graphe**.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , un **cycle** de longueur  $n$  de  $\Gamma$  est un chemin  $(e_1, \dots, e_n)$  sans aller-retours tel que les  $v_i = t(e_i)$  soient distincts, et tel que  $v_n = o(e_1)$ .

**Définition 1.13.** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe, la **distance combinatoire** entre deux sommets  $v, v' \in V$  est la longueur du plus court chemin (si il existe) entre  $v$  et  $v'$ , on la notera  $d_\Gamma(v, v')$ .

Enfin, on utilisera pour certains exemples un type de graphe particulier, les **arbres**.

**Définition 1.14.** Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Une **forêt** est un graphe sans cycle (ses composantes connexes sont donc des arbres).

**Exemple.** Voici quelques exemples de graphes :



Parmi ces graphes,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont connexes tandis que  $\Gamma_1$  a deux composantes connexes. De plus on remarque que  $\Gamma_2$  est un arbre contrairement aux autres.

**Remarque.** En particulier, un arbre est un graphe simplicial.

**Définition 1.15.** Un **arbre couvrant** d'un graphe  $\Gamma$  est un sous-graphe de  $\Gamma$  qui est un arbre et qui contient tous les sommets de  $\Gamma$ .

On peut maintenant définir la notion fondamentale de **graphe de Cayley**.

**Définition 1.16.** Le **graphe de Cayley**  $\Gamma(G, S)$  d'un groupe  $G$  de type fini engendré par  $S$  est un graphe simplicial où les sommets sont les éléments de  $G$  (dans la suite on identifiera les sommets du graphe de Cayley d'un groupe et les éléments du groupe). Une arête relie  $g_1$  et  $g_2$  si et seulement si  $d_S(g_1, g_2) = 1$  c'est-à-dire  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . Autrement dit, on obtient  $g_2$  en multipliant  $g_1$  à droite par un des générateurs.

**Remarque.** On peut aussi associer une couleur  $c_s$  à chaque générateur  $s \in S$ , ces couleurs nous permettront de colorer les arêtes  $\{g, gs\}$  de la couleur  $c_s$ . On pourra utiliser ces couleurs dans quelques exemples pour rendre plus explicite le rôle des générateurs.

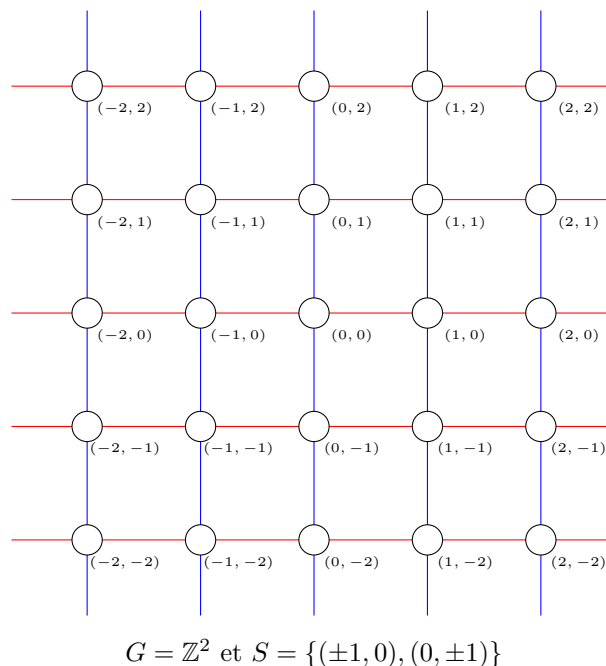
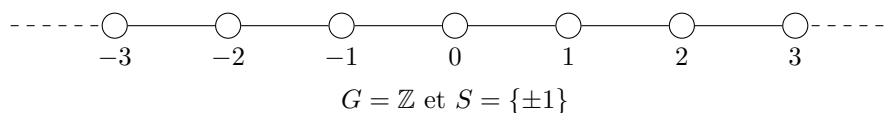
On peut montrer les propriétés élémentaires suivantes.

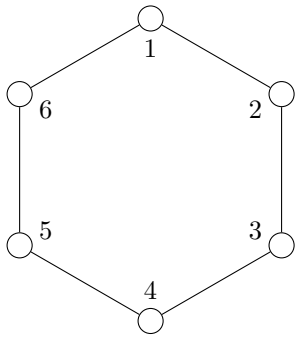
**Proposition 1.17.** *Le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  d'un groupe  $G$  de type fini engendré par  $S$  est un graphe connexe, régulier (chaque sommet a le même degré, ici le cardinal de  $S$ ) et localement fini (chaque sommet a un degré fini).*

*Démonstration.* Cela résulte directement du fait que  $S$  engendre  $G$ , en effet pour montrer que  $\Gamma(G, S)$  est connexe il nous suffit de montrer que chaque sommet  $g$  est relié par un chemin à l'élément neutre  $1_G$ . Comme  $S$  engendre  $G$ , on peut écrire  $g$  sous la forme  $g = s_1 s_2 \dots s_n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $s_i \in S$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi  $g = s_1 s_2 \dots s_n$  est adjacent à  $s_1 \dots s_{n-1}$  qui est adjacent à  $s_1 \dots s_{n-2}$  et ainsi de suite jusqu'à  $s_1$  qui est adjacent à  $1_G$ . On peut donc relier tout sommet de  $\Gamma(G, S)$  à l'élément neutre, le graphe de Cayley est bien connexe.

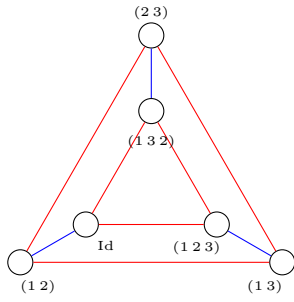
Ensuite, par définition, chaque sommet  $g$  va être adjacent aux sommets de la forme  $gs$  pour  $s \in S$  et on a bien que  $gs \neq g$  (sinon  $s = 1_G$ ) et que  $gs \neq gs'$  pour  $s \neq s'$ . On en déduit que  $g$  a un degré égal à  $|S|$  ce qui permet d'avoir les deux dernières affirmations. □

**Exemple.** Voici quelques exemples élémentaires :

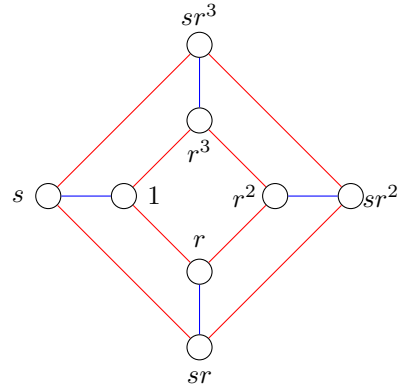




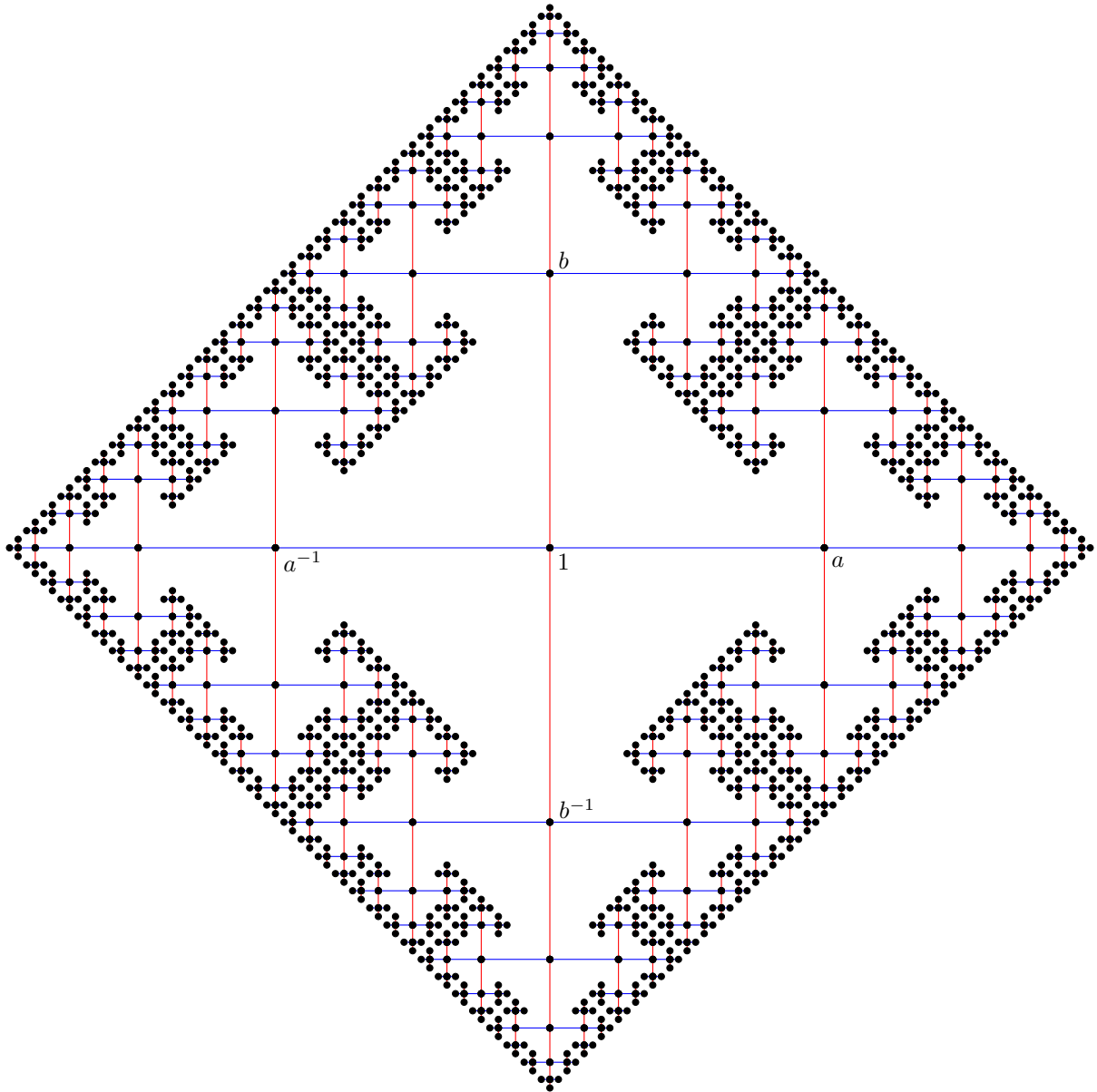
$G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et  $S = \{1\}$



$G = S_3$  et  $S = \{(12), (123)^{\pm 1}\}$



$G = D_4$  et  $S = \{r^{\pm 1}, s\}$



$G$  : le groupe libre sur  $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$

On peut définir une action de  $G$  sur  $\Gamma(G, S)$  par automorphismes de graphe via les translations à gauche de  $G$  dans lui-même.



**Proposition 1.18.** On rappelle que  $V_{\Gamma(G,S)} = G$ . Pour tout  $g \in G$  on a :

$$\begin{aligned} \sigma_g &: G \rightarrow G \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

Cette application définit un automorphisme simplicial de  $\Gamma(G, S)$ .

*Démonstration.* On a vu que si  $g_1, g_2 \in G$  on a pour tout  $g \in G$  que  $d_S(g_1, g_2) = d_S(gg_1, gg_2)$ . En particulier si  $d_S(g_1, g_2) = 1$  alors  $d_S(gg_1, gg_2) = 1$ . Donc si  $g_1$  et  $g_2$  sont adjacents alors  $gg_1$  et  $gg_2$  aussi. On a bien une action de groupe par automorphismes de graphes. □

On peut ensuite considérer la réalisation géométrique  $\text{real}(\Gamma)$  d'un graphe simplicial et connexe.

**Proposition 1.19.** L'espace  $\text{real}(\Gamma)$  est un espace métrisable, connexe par arcs et le plongement naturel de  $(\Gamma, d_\Gamma)$  dans  $\text{real}(\Gamma)$  est une isométrie.

*Démonstration.* La distance (que l'on notera  $d(x, y)$  pour  $x, y \in \text{real}(\Gamma)$ ) que l'on considère ici est celle induite par la distance définie en 1.13. Plus précisément, pour deux sommets de  $\text{real}(\Gamma)$  leur distance dans  $\text{real}(\Gamma)$  est la même que celle dans  $\Gamma$  (et elle est finie car  $\Gamma$  est un graphe simplicial connexe). Pour deux points sur une même arête dans  $\text{real}(\Gamma)$  leur distance est celle induite par l'homéomorphisme avec  $[0, 1]$ . Enfin, pour deux points  $x, y$  sur deux arêtes différentes d'extrémités respectives  $v_0, v_1$  et  $w_0, w_1$  leur distance est :

$$\min\{d(x, v_0) + d(v_0, w_0) + d(w_0, y), d(x, v_0) + d(v_0, w_1) + d(w_1, y), \\ d(x, v_1) + d(v_1, w_0) + d(w_0, y), d(x, v_1) + d(v_1, w_1) + d(w_1, y)\}$$

On admet que c'est bien une distance sur cet espace.

Soient  $x_1$  et  $x_2 \in \text{real}(\Gamma)$ , comme les arêtes sont homéomorphes à des intervalles de longueur 1 alors on peut relier  $x_1$  à une des extrémités de l'arête sur laquelle il repose par un chemin et de même pour  $x_2$ . Enfin, on a vu précédemment que l'on pouvait relier les sommets entre eux (car  $\Gamma$  est connexe), ainsi  $\text{real}(\Gamma)$  est bien connexe par arcs.

Ensuite, comme les arêtes sont de longueurs 1, le plongement de  $(\Gamma, d_\Gamma)$  dans  $(\text{real}(\Gamma), d)$  est une isométrie. □

On peut en déduire le corollaire suivant.

**Corollaire.** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  un ensemble générateur de  $G$ . L'espace  $\text{real}(\Gamma(G, S))$  est un espace métrisable, connexe par arcs et le plongement naturel de  $(G, d_S)$  dans  $\text{real}(\Gamma(G, S))$  est une isométrie.

**Exemple.** Nous allons dans cet exemple étudier le cas du **groupe de Heisenberg**. C'est le sous-groupe de  $SL_3(\mathbb{Z})$  contenant les matrices de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n, m, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

On vérifie facilement que c'est un sous-groupe. Montrons qu'il est engendré par les éléments :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, on voit facilement que tous les éléments du groupes peuvent s'écrire sous la forme  $a^m b^n c^p$  avec  $m, n, p \in \mathbb{Z}$  puisque :

$$a^m b^n c^p = \begin{pmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque aussi que cet ensemble de générateurs est soumis aux relations suivantes :

$$ac = ca \quad cb = bc \quad cab = ba$$

En réalité on peut même montrer que le groupe de Heisenberg est isomorphe au groupe ayant la présentation suivante :

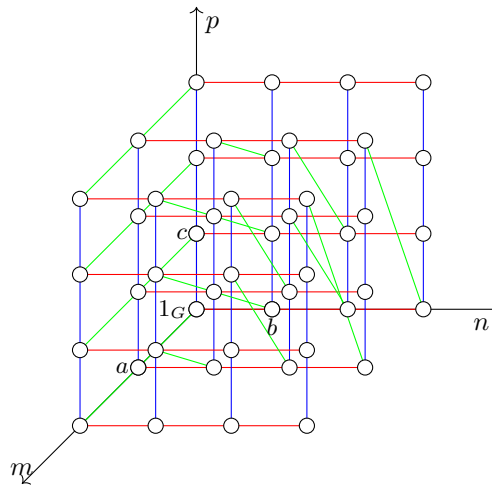
$$G = \langle a, b, c \mid a^{-1}c^{-1}ac, c^{-1}b^{-1}cb, caba^{-1}b^{-1} \rangle$$

On remarque aussi que le centre de  $G$  est le sous-groupe cyclique engendré par  $c$  (isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ). Le quotient de  $G$  par son centre correspond au groupe abélien libre de rang 2 engendré par les classes de  $a$  et  $b$ . En effet on a  $ab = bac$  donc après le passage au quotient  $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$  d'où la commutativité.

Les formules suivantes vont nous permettre de représenter le graphe de Cayley de  $G$  par les points du réseau  $\mathbb{Z}^3$  de  $\mathbb{R}^3$  :

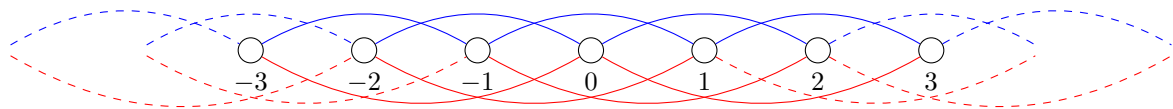
- $(a^m b^n c^p)a = a^{m+1} b^n c^{p+n}$
- $(a^m b^n c^p)b = a^m b^{n+1} c^p$
- $(a^m b^n c^p)c = a^m b^n c^{p+1}$

On sait donc comment relier les différents points du réseau, chaque coupe où  $m$  est constante est une copie du réseau  $\mathbb{Z}^2$  mais le points  $(m, n, p)$  est relié à  $(m-1, n, p-n)$  et  $(m+1, n, p+n)$ . On a donc la représentation suivante :



Graphe de Cayley du groupe de Heisenberg

Cette construction du graphe de Cayley d'un groupe  $G$  de type fini engendré par  $S$  va nous permettre de considérer et d'étudier le groupe  $G$  via sa réalisation géométrique. Cependant, cet espace dépend du choix du système de générateur. En effet si on considère  $\mathbb{Z}$  avec comme générateurs  $S = \{\pm 2, \pm 3\}$  on obtient le graphe de Cayley suivant :



$$G = \mathbb{Z} \text{ et } S = \{\pm 2, \pm 3\}$$

Si ce graphe est bien sûr différent de celui obtenu avec  $S = \{\pm 1\}$ , il lui ressemble néanmoins beaucoup «vu de loin». Pour mettre en place cette définition de «ressemblance vu de loin» nous allons développer dans la partie suivante la notion de quasi-isométrie.

## 2 Quasi-isométries

Dans cette partie, nous allons introduire la notion de quasi-isométrie entre espaces métriques. Cette notion est essentielle dans l'étude géométrique des groupes car elle va nous permettre de considérer des groupes de type fini comme des espaces métriques bien défini à quasi-isométrie près. On montrera ensuite le lemme de Švarc-Milnor qui est un résultat essentiel dans l'étude géométrique des groupes de type fini. On va pouvoir, grâce à lui, étudier des groupes à travers certaines de leurs actions sur certains espaces métriques. Il est important de comprendre que dans la démarche que nous allons suivre on ne distinguera pas les groupes quasi-isométriques entre eux.

### 2.1 Définition et premières propriétés

On va commencer par définir la notion de quasi-isométrie :

**Définition 2.1.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est un **plongement quasi-isométrique** si il existe des constantes  $\lambda \geq 1$  et  $\epsilon \geq 0$  telles que pour tous  $x, x' \in X$  :

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \epsilon$$

La fonction  $f$  est **quasi-surjective** si il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que :  $d_Y(y, f(x)) \leq C$ .

Si la fonction  $f$  est un plongement quasi-isométrique quasi-surjective, on dit que c'est une **quasi-isométrie** et que les espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont **quasi-isométriques**, on notera  $X \sim_{QI} Y$ .

**Exemple.** Un premier exemple élémentaire peut être le suivant : on munit  $\mathbb{R}$  de sa métrique usuelle et  $\mathbb{Z}$  de la métrique induite par le plongement de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrons que ce plongement est une quasi-isométrie, on a bien par définition de la métrique sur  $\mathbb{Z}$  que c'est un plongement isométrique et donc quasi-isométrique. Ensuite pour  $x \in \mathbb{R}$  on sait qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|n - x| \leq \frac{1}{2}$ . Ceci montre bien que  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}$  sont quasi-isométriques.

**Proposition 2.2.** *La relation  $\sim_{QI}$  est une relation d'équivalence entre espaces métriques.*

*Démonstration.* Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  et  $(Z, d_Z)$  des espaces métriques :

- **Réflexivité** : L'application identité est de manière évidente une application surjective isométrique. C'est donc une quasi-isométrie. On a bien  $X \sim_{QI} X$ .
- **Symétrie** : Supposons  $X \sim_{QI} Y$  il existe donc  $f : X \rightarrow Y$  une quasi-isométrie. On va montrer qu'il existe  $g : Y \rightarrow X$  une quasi-isométrie. On sait qu'il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que :  $d_Y(y, f(x)) \leq C$  on pose donc  $g : Y \rightarrow X$  la fonction qui à  $y \in Y$  associe un  $x \in X$  tel que  $d_Y(y, f(x)) \leq C$  (on peut dire que  $g$  est un quasi-inverse de  $f$ ). On a dans un premier temps que :  $d_Y(f \circ g(y), y) \leq C$ . Puis comme  $f$  est une quasi-isométrie entre  $X$  et  $Y$ , il existe  $\lambda \geq 1$  et  $\epsilon \geq 0$  tels que

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + \epsilon$$

En particulier, si  $x' = g \circ f(x)$  alors  $d_Y(f(x'), f(x)) \leq C$ , on a alors :

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq C$$

Et donc :

$$d_X(x, x') \leq \lambda C + \epsilon$$

Ainsi si on pose  $C' = \lambda C + \epsilon$ ,  $g$  est une application quasi-surjective pour  $C'$  puisque pour tout  $x \in X$ ,  $d_X(x, g(f(x))) \leq C'$  et donc il existe  $y \in Y$  tel que  $d_X(x, g(y)) \leq C'$ .

Ensuite, on peut réécrire les inégalités de quasi-isométries de  $f$  de la façon suivante :

$$\frac{1}{\lambda}d_Y(f(x), f(x')) - \frac{\epsilon}{\lambda} \leq d_X(x, x') \leq \lambda d_Y(f(x), f(x')) + \lambda \epsilon$$

Ainsi, pour tous  $y, y' \in Y$  on a :

$$\frac{1}{\lambda}d_Y(f \circ g(y), f \circ g(y')) - \frac{\epsilon}{\lambda} \leq d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda d_Y(f \circ g(y), f \circ g(y')) + \lambda \epsilon$$

Et on sait que  $d_Y(f \circ g(y), y) \leq C$  donc par inégalité triangulaire on a :

$$d_Y(f \circ g(y), f \circ g(y')) \leq d_Y(f \circ g(y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f \circ g(y')) \leq d_Y(y, y') + 2\lambda$$

Puis en substituant dans les relations on obtient :

$$d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda^2 d_Y(y, y') + \lambda(2\lambda + \epsilon)$$

Puis un argument similaire sur l'autre inégalité nous permet d'obtenir que :

$$\frac{1}{\lambda} d_Y(y, y') - \frac{\epsilon}{\lambda} - 2 \leq d_X(g(y), g(y'))$$

Ce qui nous permet de dire que  $g$  est bien une quasi-isométrie et donc que la relation est réflexive.

- **Transitivité :** On suppose  $X \sim_{\text{QI}} Y$  et  $Y \sim_{\text{QI}} Z$  on veut montrer que  $X \sim_{\text{QI}} Z$ . On note  $f_1$  et  $f_2$  les quasi-isométries associées aux deux premières relations. On va montrer que  $f_2 \circ f_1$  est aussi une quasi-isométrie. On sait qu'il existe  $C_2 \geq 0$  (respectivement  $C_1 \geq 0$ ) tel que pour tout  $z \in Z$  (respectivement  $y \in Y$ ) il existe  $y_0 \in Y$  (respectivement  $x_0 \in X$ ) tel que  $d_Z(f_2(y_0), z) \leq C_2$  (respectivement  $d_Y(f_1(x_0), y) \leq C_1$ ). On sait aussi qu'il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$  et  $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$  tels que pour tous  $x, x' \in X$  et  $y, y' \in Y$  on a :

$$\frac{1}{\lambda_1} d_X(x, x') - \epsilon_1 \leq d_Y(f_1(x), f_1(x')) \leq \lambda_1 d_X(x, x') + \epsilon_1$$

Et

$$\frac{1}{\lambda_2} d_Y(y, y') - \epsilon_2 \leq d_Z(f_2(y), f_2(y')) \leq \lambda_2 d_Y(y, y') + \epsilon_2$$

On en déduit d'une part que pour tout  $z \in Z$  on prend  $y \in Y$  tel que  $d_Z(f_2(y), z) \leq C_2$  et  $x \in X$  tel que  $d_Y(f_1(x), y) \leq C_1$  et on obtient par inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} d_Z(f_2 \circ f_1(x), z) &\leq d_Z(f_2 \circ f_1(x), f_2(y)) + d_Z(f_2(y), z) \\ &\leq \lambda_2 d_Y(f_1(x), y) + \epsilon_2 + C_2 \\ &\leq \lambda_2 C_1 + \epsilon_2 + C_2 \end{aligned}$$

Donc on a bien une application quasi-surjective. Ensuite, pour tous  $x, x' \in X$  :

$$\begin{aligned} d_Z(f_2 \circ f_1(x), f_2 \circ f_1(x')) &\leq \lambda_2 d_Y(f_1(x); f_1(x')) + \epsilon_2 \\ &\leq \lambda_2 \lambda_1 d_X(x, x') + \lambda_2 \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} d_Z(f_2 \circ f_1(x), f_2 \circ f_1(x')) &\geq \frac{1}{\lambda_2} d_Y(f_1(x); f_1(x')) - \epsilon_2 \\ &\geq \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1} d_X(x, x') - \frac{\epsilon_1}{\lambda_2} - \epsilon_2 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que  $f_2 \circ f_1$  est bien une quasi-isométrie et donc que la relation est transitive. □

**Remarque.** Les applications **quasi-isométriques** sont des « généralisations » des applications bilipschitz (qui correspondent au cas où  $\epsilon = 0$ ). Il est important de remarquer que pour une application, le fait d'être bilipschitz est bien plus fort que le fait d'être une quasi-isométrie. En effet, une application bilipschitz est, par exemple, un homéomorphisme sur son image ce qui n'est pas du tout le cas avec les quasi-isométries en général.

On peut ensuite montrer la propriété suivante :

**Proposition 2.3.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  et  $T$  deux ensembles finis de générateurs. Alors  $(G, d_S)$  et  $(G, d_T)$  sont quasi-isométriques (et l'application est même une application bilipschitz).*

*Démonstration.* Posons  $\lambda = \max_{t \in T}(\ell_S(t))$  on considère ensuite l'application identité de  $G$  dans  $G$ . Puis pour tous  $g, g' \in G$  on pose  $g^{-1}g' = t_1 \dots t_n$  une expression réduite de  $g^{-1}g'$ , il suit que :

$$d_S(g, g') = \ell_S(g^{-1}g') = \ell_S(t_1 \dots t_n) \leq \ell_S(t_1) + \dots + \ell_S(t_n) \leq \lambda n \leq \lambda d_T(g, g')$$

Puis si on pose  $\mu = \max_{s \in S}(\ell_T(s))$  on obtient de la même façon que :  $d_T(g, g') \leq \mu d_S(g, g')$ . Enfin en posant  $\Lambda = \max(\lambda, \mu)$  on a bien les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{\Lambda} d_T(g, g') \leq d_S(g, g') \leq \Lambda d_T(g, g')$$

Et comme l'identité est un isomorphisme on peut conclure qu'elle est quasi-surjective et que c'est une quasi-isométrie. □

Enfin la proposition suivante nous permet de définir correctement le graphe de Cayley d'un groupe de type fini.

**Proposition 2.4.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  un ensemble fini de générateurs de  $G$ . Le groupe  $G$  est quasi-isométrique à son graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ .*

*Démonstration.* On considère le plongement naturel de  $G$  dans son graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$ . On a déjà montré que ce plongement était une isométrie il ne nous reste plus qu'à montrer que ce plongement est quasi-surjectif. Soit  $x \in \Gamma(G, S)$ , comme  $x$  est sur une arête qui sont toutes de longueur 1 alors il est à une distance inférieure à  $\frac{1}{2}$  d'un sommet qui est l'image d'un élément du groupe par le plongement naturel. Ceci montre que le plongement est quasi-surjectif. □

Comme dit précédemment ces deux propositions nous permettent de considérer un groupe  $G$  de type fini comme un objet géométrique (son graphe de Cayley) bien défini à quasi-isométrie près. Cependant, les groupes quasi-isométriques ne seront donc pas discernables par les invariants de quasi-isométrie que l'on donnera plus tard on «perd» donc de l'information en chemin en particulier on a le résultat suivant :

**Proposition 2.5.** *Tous les groupes finis sont quasi-isométriques entre eux.*

*Démonstration.* Cela est une conséquence du fait que les espaces métriques bornés sont quasi-isométriques entre eux. En effet, il est évident que les groupes finis sont bornés, il suffit même de prendre comme ensemble de générateurs le groupe tout entier (sauf l'élément neutre) et la distance sera alors bornée par 1. On prend ensuite deux groupes finis  $G$  et  $H$  muni de cette distance et on considère le morphisme trivial de  $G$  sur  $H$ , il est quasi-surjective puisque tous les éléments de  $H$  sont à une distance 1 de l'élément neutre. Il suffit ensuite de prendre  $\epsilon = 1$  pour avoir les deux inégalités et on a une quasi-isométrie. □

**Remarque.** Le graphe de Cayley d'un groupe fini d'ordre  $n$  associé à l'ensemble de générateurs décrit dans la preuve ci-dessus est le graphe complet d'ordre  $n$ .

## 2.2 Lemme de Švarc-Milnor

On va tout d'abord rappeler quelques définitions et résultats de topologie et d'espaces métriques :

**Définition 2.6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, une **courbe** ou un **chemin** dans  $X$  est une application continue  $\gamma$  d'un intervalle compact  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \leq b$ . On dit que  $\gamma$  joint les points  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ . Si on a deux chemins  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$  et  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$  tels que  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ , on définit leur **concaténation** comme le chemin  $\gamma : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X$  vérifiant  $\gamma(t) = \gamma_1(t)$  pour  $t \in [a_1, b_1]$  et  $\gamma(t) = \gamma_2(t + a_2 - b_1)$  pour  $t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]$ . On peut plus généralement concaténer un nombre entier de chemins en répétant cette opération.

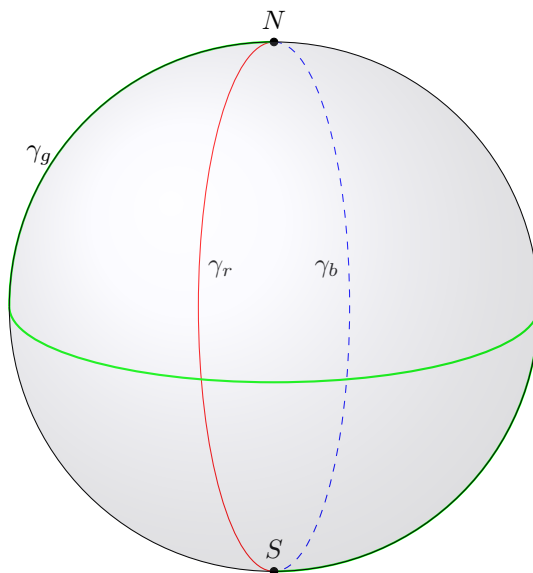
Il nous arrivera de nous intéresser à des types particulier de chemins : les **géodésiques**.

**Définition 2.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, un **chemin géodésique** joignant  $x \in X$  et  $y \in X$  (ou une **géodésique** entre  $x$  et  $y$ ) est une application continue  $\gamma$  d'un compact  $[0, l] \subset \mathbb{R}$  dans  $X$  tel que  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(l) = y$  et  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  pour tout  $t, t' \in [0, l]$  (en particulier  $d(x, y) = l$ ). L'image d'une géodésique est un **segment géodésique** d'extrémités  $x$  et  $y$ .

Un **rayon géodésique** de  $X$  est une application continue  $\gamma$  de  $[0; +\infty[$  dans  $X$  vérifiant  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  pour tout  $t, t' \geq 0$ . Une **droite géodésique** de  $X$  est une application continue  $\gamma$  de  $\mathbb{R}$  dans  $X$  vérifiant  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  pour tout  $t, t' \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $(X, d)$  est un **espace métrique géodésique** (ou plus simplement un **espace géodésique**) si pour tout  $x, y \in X$  il existe une géodésique les joignant.

**Exemple.** On donne sans justification l'exemple suivant :



Sphère de dimension 3

Ici, les chemins  $\gamma_r$  et  $\gamma_b$  sont des géodésiques joignant les deux pôles  $N$  et  $S$  (car ce sont des portions du grand cercle passant par  $N$  et par  $S$ ), ce n'est pas le cas de  $\gamma_g$ .

La prochaine étape est de définir la longueur d'un chemin.

**Définition 2.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, la **longueur** d'un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est :

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

Où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions (sans borne sur  $n$ ) telles que :  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ .

La longueur d'un chemin est donc un réel positif potentiellement infini. On dit qu'un chemin est **rectifiable** si sa longueur est finie.

**Exemple.** Les géodésiques sont des chemins rectifiables. Soient  $x, y \in X$  est une géodésique  $\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X$  joignant  $x$  et  $y$ . Pour toute subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d(x, y)$  de  $[0, d(x, y)]$  on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+1} - t_i = t_n - t_0 = d(x, y)$$

Et on en déduit que la longueur d'une géodésique entre  $x$  et  $y$  est  $d(x, y)$ .

**Exemple.** On peut construire assez facilement des chemins non rectifiables, par exemple dans  $X = [0, 1]$ , considérons une suite strictement croissante  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $[0, 1]$  telle que  $t_0 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ . On pose ensuite

$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin tel que  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(t_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Ce n'est pas un chemin rectifiable car :

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \sup_{0=a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(a_i), \gamma(a_{i+1})) \\ &\geq \sum_{i=0}^{+\infty} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i+1} = +\infty \end{aligned}$$

On a ensuite les propriétés suivantes de la longueur :

**Proposition 2.9.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$  deux chemins on a :

- $l(\gamma_1) \geq d(\gamma_1(a_1), \gamma_1(b_1))$ .
- $l(\gamma_1) = 0 \Leftrightarrow \gamma_1$  est constante.
- Si  $\gamma$  est la concaténation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  alors :  $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .
- Le chemin inverse de  $\bar{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow X$  défini comme  $\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1(b + a - t)$  vérifie  $l(\gamma_1) = l(\bar{\gamma}_1)$ .

*Démonstration.* Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$  deux chemins on a :

- Par définition en prenant la subdivision  $t_0 = a_1$  et  $t_1 = b_1$ .
- Pour tous  $x, y \in [a_1, b_1]$  on a  $l(\gamma_1) \geq d(\gamma_1(x), \gamma_1(y))$  donc  $d(\gamma_1(x), \gamma_1(y)) = 0$  et donc  $\gamma_1(x) = \gamma_1(y)$ .
- Soit  $a_1 = t_0, t_1, \dots, t_n = b_1 + b_2 - a_2$  une subdivision de  $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ , il existe  $i_0 \in \{0, 1, \dots, n\}$  tel que  $t_{i_0} \geq b_1$  et  $t_{i_0-1} < b_1$ . On construit alors une subdivision  $s_0 = a_2$  puis  $s_i = t_{i_0+i-1} - b_1 + a_2$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n - i_0 + 1\}$  et une subdivision  $r_i = t_i$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, i_0 - 1\}$  et  $r_{i_0} = b_1$  on a ensuite par inégalité triangulaire :

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{i_0-1} d(\gamma_1(r_i), \gamma_1(r_{i+1})) + \sum_{j=0}^{n-i_0} d(\gamma_2(s_j), \gamma_2(s_{j+1})) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$$

Ainsi,  $l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ .

Inversement, si on a les subdivisions  $a_1 = r_0, r_1, \dots, r_{n_1} = b_1$  et  $a_2 = s_0, s_1, \dots, s_{n_2} = b_2$  on construit la subdivision :  $t_i = r_i$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, n_1\}$  et  $t_{n_1+i} = s_i + a_2 - b_1$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n_2\}$  on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} d(\gamma_1(r_i), \gamma_1(r_{i+1})) + \sum_{j=0}^{n_2-1} d(\gamma_2(s_j), \gamma_2(s_{j+1})) = \sum_{i=0}^{n_1+n_2-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq l(\gamma)$$

Ce qui implique  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$  et donc  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2) = l(\gamma)$ .

- Pour toute subdivision  $a_1 = t_0, t_1, \dots, t_n = b_1$  on construit la subdivision avec  $a_i = a + b - t_{n-i}$  on a alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\bar{\gamma}_1(t_i), \bar{\gamma}_1(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma_1(a + b - t_i), \gamma_1(a + b - t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma_1(a_i), \gamma_1(a_{i+1})) \leq l(\gamma_1)$$

Et inversement :

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma_1(t_i), \gamma_1(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\bar{\gamma}_1(a + b - t_i), \bar{\gamma}_1(a + b - t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\bar{\gamma}_1(a_i), \bar{\gamma}_1(a_{i+1})) \leq l(\bar{\gamma}_1)$$

D'où  $l(\gamma_1) \leq l(\bar{\gamma}_1)$  et  $l(\gamma_1) \geq l(\bar{\gamma}_1)$  ainsi  $l(\gamma_1) = l(\bar{\gamma}_1)$ . □

On peut maintenant définir la notion d'espace de longueur.

**Définition 2.10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, on dit que c'est un **espace de longueur** si pour tout couple de points  $(x, y) \in X^2$  la distance entre  $x$  et  $y$  est égal à la borne inférieure des longueurs des chemins rectifiables les joignant.

On a la propriété suivante :

**Proposition 2.11.** *Un espace géodésique est un espace de longueur.*

*Démonstration.* Soient  $x, y \in X$  et  $\gamma$  une géodésique joignant  $x$  et  $y$ . On a vu que  $l(\gamma) = d(x, y)$ . Or comme pour tout chemin  $\gamma'$  joignant  $x$  et  $y$  on a montré que  $d(x, y) \leq l(\gamma')$ . Dans la cas d'un espace géodésique, la borne inférieure est atteinte (par la géodésique) et donc que notre espace géodésique est un espace de longueur.  $\square$

On rappelle la définition suivante :

**Définition 2.12.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, on dit que cet espace est **propre** si pour tout  $x \in X$  et  $r > 0$  la boule fermée centrée en  $x$  et de rayon  $r$ ,  $\bar{B}(x, r)$  est compacte.

On rappelle ensuite quelques définitions sur les actions de groupe :

**Définition 2.13.** Soit  $G$  un groupe et  $X$  un espace topologique non vide, localement compact, connexe, localement connexe par arcs et à base dénombrable. Ici une **action de groupe** de  $G$  sur  $X$  est un morphisme de  $\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ , dans la suite on notera pour  $g \in G$  et  $x \in X$ ,  $g \cdot x$  à la place de  $\varphi(g)(x)$ . On dit de plus que :

- L'action est **fidèle** si  $\ker(\varphi) = \{1_G\}$ .
- L'action est **libre** si pour tout  $x \in X$  et pour tout  $g \in G \setminus \{1_G\}$  on a  $g \cdot x \neq x$ .
- L'action est **cocompact** si il existe un compact  $K$  de  $X$  tel que  $X = G \cdot K = \cup_{g \in G} g \cdot K$ .
- L'action est **propre** si pour tout compact  $K$  de  $X$ , l'ensemble  $\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.
- Le groupe **agit par isométries** sur  $X$  si  $X$  est un espace métrique et que  $\varphi(G)$  est contenu dans le groupe des isométries de  $X$ .
- Pour  $x \in X$  l'ensemble  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  est appelé le **stabilisateur de  $x$** .

Montrons ensuite la proposition suivante :

**Proposition 2.14.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $G$  un groupe de type fini engendré par un ensemble  $S$  et muni de la distance  $d_S$ . Si  $G$  agit par isométries sur  $X$ , alors pour tout  $x_0 \in X$ , il existe  $\mu > 0$  tel que  $d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq \mu d_S(g, g')$  pour tous  $g, g' \in G$ .*

*Démonstration.* Comme  $S$  est fini, on peut poser  $\mu = \max\{d(x_0, s \cdot x_0) \mid s \in S\}$ . Si  $d_S(g, g') = n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $g^{-1}g' = s_1 s_2 \dots s_n$  avec  $s_i \in S$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Posons  $g_i = s_1 s_2 \dots s_i$  puis par l'inégalité triangulaire et le fait que  $G$  agit sur  $X$  par isométries :

$$\begin{aligned} d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) &= d(x_0, g^{-1}g' \cdot x_0) \\ &= d(x_0, s_1 s_2 \dots s_n \cdot x_0) \\ &\leq d(x_0, g_1 \cdot x_0) + d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) + \dots + d(g_{n-1} \cdot x_0, g_n \cdot x_0) \end{aligned}$$

Et comme pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  on a  $d(g_i \cdot x_0, g_{i+1} \cdot x_0) = d(x_0, s_{i+1} \cdot x_0) \leq \mu$ . On obtient :

$$d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq n\mu = \mu d_S(g, g')$$

$\square$

Le prochain théorème va nous permettre de déterminer une partie génératrice d'un groupe à partir d'une action de ce groupe sur un espace topologique connexe.

**Théorème 2.15.** *Soit  $X$  un espace topologique connexe et  $G$  un groupe agissant sur  $X$  (par homéomorphismes). Soit  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  $G \cdot U = X$  alors l'ensemble  $S = \{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$  engendre  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $H \subset G$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $S$ , soit  $V = H \cdot U$  et  $V' = (G \setminus H) \cdot U$  (ce sont deux ouverts). Si  $V \cap V' \neq \emptyset$  alors il existe  $h \in H, h' \in G \setminus H$  tels que  $h^{-1}h' \cdot U \cap U \neq \emptyset$  mais alors  $h^{-1}h' \in H$  et donc  $h' \in H$  ce qui est absurde. On a ainsi  $V \cap V' = \emptyset$  mais comme  $X$  est connexe cela implique que  $V' = \emptyset$  et donc  $H = G$ .  $\square$



On peut enfin énoncer et prouver le lemme de Švarc-Milnor qui est un résultat essentiel qui nous permettra d'étudier un groupe via certaines de ses actions sur des espaces de longueur (comme les espaces géodésiques).

**Lemme 2.16 (Švarc-Milnor).** *Soit  $X$  un espace géodésique propre et  $G$  un groupe. Si  $G$  agit proprement, cocompactement et par isométries sur  $X$  alors  $G$  est de type fini et pour tout  $x_0 \in X$  l'application  $g \mapsto g \cdot x_0$  est une quasi-isométrie.*

*Démonstration.* Comme  $G$  agit cocompactement sur  $X$ , il existe  $K$  un compact de  $X$  tel que  $X = G \cdot K$ . Comme  $K$  est borné (car compact), on peut choisir  $x_0 \in X$  et  $D > 0$  tel que  $K \subset B(x_0, \frac{D}{3})$  et posons  $S = \{g \in G \mid g \cdot B(x_0, D) \cap B(x_0, D) \neq \emptyset\}$ . Comme  $G$  agit proprement sur  $X$ ,  $S$  est fini, de plus le théorème 2.15 nous dit que  $S$  engendre  $G$ .

Posons maintenant  $d_S$  la distance induite par  $S$  sur  $G$ , d'après la proposition 2.14, il existe une constante  $\mu$  tel que  $d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq \mu d_S(g, g')$  pour tout  $g, g' \in G$ . Pour montrer que  $g \mapsto g \cdot x_0$  est un plongement quasi-isométrique on doit encore borner  $d_S(g, g')$  en fonction de  $d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0)$ . Comme  $G$  agit par isométries sur  $X$  il nous suffit de comparer  $d_S(1_G, g)$  et  $d(x_0, g \cdot x_0)$ .

Soit  $g \in G$  et un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  de longueur finie avec  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = g \cdot x_0$ . On peut choisir une partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  tel que  $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \frac{D}{3}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Puis comme  $X = G \cdot B(x_0, \frac{D}{3})$ , pour tout  $i$  il existe  $g_i \in G$  et  $y_i \in B(x_0, \frac{D}{3})$  tels que  $\gamma(t_i) = g_i \cdot y_i$  et  $d(x_0, y_i) \leq \frac{D}{3}$  d'où  $d(g_i \cdot x_0, g_i \cdot y_i) \leq \frac{D}{3}$  ce qui donne  $d(g_i \cdot x_0, \gamma(t_i)) \leq \frac{D}{3}$ . On choisit  $g_0 = 1_G$  et  $g_n = g$  et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  on a  $d(g_i \cdot x_0, g_{i-1} \cdot x_0) \leq D$  et donc  $s_i = g_{i-1}^{-1} g_i \in S$ . Il suit :

$$g = g_0(g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2) \dots (g_{n-1}^{-1}g_n) = s_1 s_2 \dots s_n$$

Ensuite comme  $X$  est un espace de longueur, on peut choisir le chemin  $\gamma$  comme ayant une longueur inférieure à  $d(x_0, g \cdot x_0) + 1$ . On prend ensuite la partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  la plus «grossière» possible (c'est-à-dire avec  $n$  minimum) vérifiant  $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \frac{D}{3}$  on a alors  $n \leq (d(x_0, g \cdot x_0) + 1) \frac{3}{D} + 1$ . Enfin, comme  $g$  peut être exprimé comme un produit de  $n$  éléments de  $S$  on obtient :

$$d_S(1_G, g) \leq (d(x_0, g \cdot x_0) + 1) \frac{3}{D} + 1$$

Ce qui montre que l'application  $g \mapsto g \cdot x_0$  est un plongement quasi-isométrique pour tout  $x_0 \in X$ . Le fait que ce plongement soit quasi-surjective vient du fait que  $X = G \cdot B(x_0, \frac{D}{3})$ .

On peut résumer la preuve avec le schéma suivant :

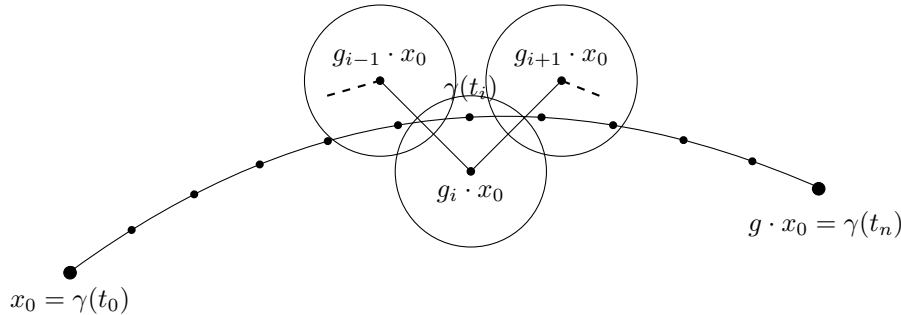


Schéma de la preuve

□

Avant d'aller plus loin on va montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.17.** *La réalisation géométrique de tout graphe connexe localement fini  $\Gamma$  est un espace géodésique propre.*

*Démonstration.* Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de la réalisation géométrique de  $\Gamma$ . On suppose dans un premier temps que  $x_0$  et  $x_1$  correspondent à des sommets de  $\Gamma$ . Par hypothèse, le graphe est connexe donc il existe un plus court chemin  $\gamma$  entre  $x_0$  et  $x_1$  dans  $\Gamma$ . Comme les arêtes de  $\text{real}(\Gamma)$  sont isométriques à des segments de longueur 1, on peut joindre n'importe quelle paire de sommets adjacents par une géodésique de longueur 1. Ainsi, le chemin  $\gamma$  induit une géodésique dans  $\text{real}(\Gamma)$  joignant  $x_0$  et  $x_1$  (en concaténant les géodésiques correspondant aux arêtes du chemin  $\gamma$ ).

Maintenant, on suppose que  $x_0$  et  $x_1$  sont des points quelconques de  $\text{real}(\Gamma)$ . S'ils sont sur la même arête, il existe évidemment une géodésique les joignant. Sinon, on note  $v_0, v_1$  les extrémités de l'arête sur laquelle repose  $x_0$  et  $u_0, u_1$  les extrémités de l'arête sur laquelle repose  $x_1$ . On considère  $v_i, u_j$  (avec  $i, j \in \{0, 1\}$ ) tels que  $d_\Gamma(v_i, u_j)$  soit minimal. On peut joindre  $v_i$  et  $u_j$  par une géodésique. Puis on peut joindre  $x_0$  et  $v_i$  ainsi que  $x_1$  et  $u_j$  par une géodésique. En les concaténant, on obtient bien une géodésique entre  $x_0$  et  $x_1$ .

Enfin, montrons que  $\text{real}(\Gamma)$  est propre. Soient  $x \in \text{real}(\Gamma)$ ,  $r > 0$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\bar{B}(x, r)$ . Comme  $\Gamma$  est localement fini, l'ensemble  $\bar{B}(x, r)$  ne contient qu'un nombre fini de sommets et d'arêtes. Ainsi, une infinité de points de la suite tombent dans une même arête (puisque les extrémités des arêtes sont dans les arêtes). Mais les arêtes sont homéomorphes à des segments de longueur 1, et sont donc compactes. Ainsi, on peut extraire de cette infinité de points de la suite une suite convergente par la propriété de Bolzano-Weierstrass pour les compacts. □

La proposition précédente induit en particulier :

**Corollaire.** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S$  un ensemble générateur de ce groupe. La réalisation géométrique du graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  de ce groupe est un espace géodésique propre.

On peut ensuite énoncer une conséquence du lemme de Švarc-Milnor.

**Proposition 2.18.** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $G$ . Alors  $G$  et  $H$  sont quasi-isométriques et  $H$  est de type fini.

*Démonstration.* On fait agir de manière naturelle (par translation à gauche)  $H$  sur  $\Gamma(G, S)$  (qui est un espace de longueur par la proposition précédente et la proposition 2.11). Cette action est une action par isométries (car  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et que l'action naturelle de  $G$  sur  $\Gamma(G, S)$  est une action par isométries).

Montrons que cette action est cocompact. Par hypothèse,  $H$  est d'indice fini  $k$  dans  $G$  on note donc  $g_1, g_2, \dots, g_k$  un système de représentants des classes à gauche, modulo  $H$ . On peut ensuite poser la constante suivante :  $r = \max\{d_S(1_G, g_i) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$  et  $K = \bar{B}(1_G, r)$  ( $K$  est un compact par la proposition précédente).

On va montrer que  $\Gamma(G, S) = H \cdot K$ . Soit  $g \in G$  il existe  $h \in H$  et  $i \in \{1, \dots, k\}$  tels que  $g = hg_i \in H \cdot K$ . Ceci montre bien que l'action est cocompact.

Montrons ensuite que l'action est propre. Soit  $K$  un compact de  $\Gamma(G, S)$ , quitte à prendre une boule fermée le contenant on peut supposer que  $K = \bar{B}(g, D)$  avec  $g \in G$  et  $D \in \mathbb{R}^{+*}$ . Montrons qu'il existe  $D' \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que pour tout  $h \in H$  tel que  $\ell_S(h) \geq D'$  on a  $h \cdot B(g, D) \cap B(g, D) = \emptyset$ . Posons  $D' > 2D + 2\ell_S(g)$ , on a alors pour  $h \in H$  tel que  $\ell_S(h) \geq D'$  :

$$d_S(hg, g) = \ell_S((hg)^{-1}g) \geq \ell_S((hg)^{-1}) - \ell_S(g) \geq \ell_S(hg) - \ell_S(g) \geq \ell_S(h) - 2\ell_S(g) \geq 2D$$

Ceci implique bien que  $h \cdot B(g, D) \cap B(g, D) = \emptyset$  puisque la distance est invariante par translation à gauche. Enfin, comme  $\Gamma(G, S)$  est localement fini alors  $\{h \in H \mid h \cdot \bar{B}(g, D) \cap \bar{B}(g, D) \neq \emptyset\} \subset B(1_G, D')$  est bien fini.

Ainsi, par le lemme de Švarc-Milnor on obtient bien que  $H$  est de type fini et que  $H$  et  $G$  sont quasi-isométriques. □

On rappelle la définition suivante :

**Définition 2.19.** Deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  sont dits **commensurables** si il existe deux sous-groupes d'indices finis  $H_1 \subset G_1$  et  $H_2 \subset G_2$  tels que  $H_1$  et  $H_2$  sont isomorphes.

La proposition 2.18 implique de façon évidente le théorème suivant :

**Théorème 2.20.** Si  $G_1$  et  $G_2$  sont commensurables alors ils sont quasi-isométriques.

**Remarque.** La réciproque est fautive, pour un contre-exemple voir 8.48 de [4].

### 3 Espace des bouts

Dans cette partie, on va dans un premier temps définir l'**espace des bouts** d'un espace topologique. Cet espace des bouts correspond grossièrement aux composantes connexes à l'infini de cet espace. On verra ensuite quelques propriétés sur cet espace et en particulier que c'est un invariant par quasi-isométrie. Cela nous permettra finalement de définir et d'étudier l'espace des bouts d'un groupe de type fini. On verra en particulier plusieurs théorèmes qui montrent que l'espace des bouts d'un groupe peut nous renseigner sur le groupe.

#### 3.1 Définition de l'espace des bouts

Nous allons définir l'espace des bouts d'un espace topologique à partir des **rayons propres**, on rappelle pour cela les deux définitions suivantes :

**Définition 3.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est une **application propre** si pour tout compact  $K \subset Y$  son image réciproque  $f^{-1}(K)$  est elle aussi compacte dans  $X$ .

**Définition 3.2.** Soit  $X$  un espace topologique, un **rayon** de  $X$  est une application continue  $r : [0, +\infty[ \rightarrow X$ .

**Remarque.** Un **rayon propre** est donc une application continue et propre  $r : [0, +\infty[ \rightarrow X$ . Il faut voir un rayon propre comme «une manière d'aller à l'infini». En effet comme  $r$  est propre alors pour tout compact  $K \subset X$  il existe un réel  $M$  tel que  $r([M, +\infty[) \subset X \setminus K$  donc  $r$  «sort de tout compact» à partir d'un certain temps.

Dans la suite de ce rapport, on supposera que  $X$  est un espace topologique **non vide, séparé, localement compact, connexe, localement connexe par arcs et avec une base dénombrable d'ouverts**.

On introduit ensuite la relation suivante sur les rayons propres d'un espace topologique.

**Définition 3.3.** Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux rayons propres de  $X$ . On dit que  $r_1$  et  $r_2$  **convergent vers le même bout** si pour tout compact  $K \subset X$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1([N, +\infty[)$  et  $r_2([N, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ .

**Proposition 3.4.** La relation «converger vers le même bout» est une relation d'équivalence pour les rayons propres de  $X$ .

---

*Démonstration.* Soient  $r_1, r_2$  et  $r_3$  des rayons propres de  $X$  :

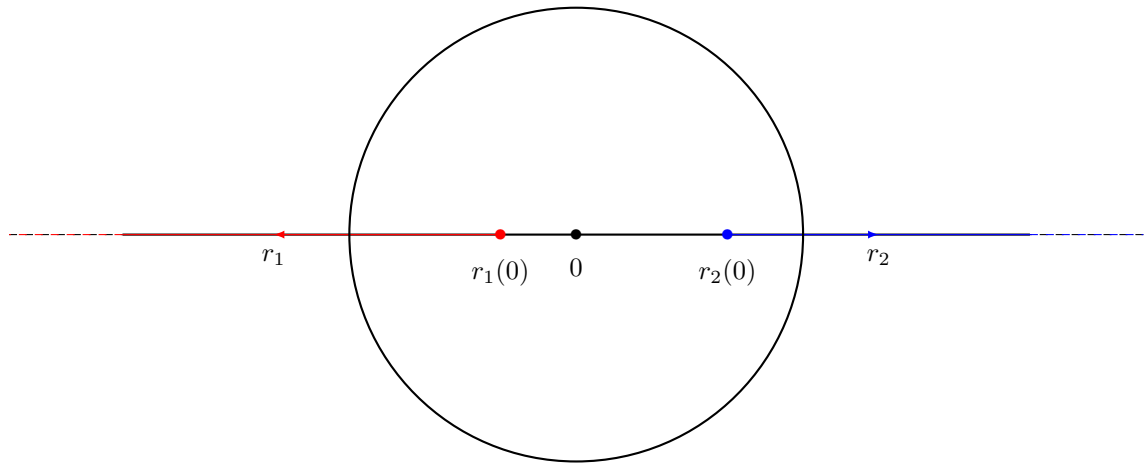
- **Réflexivité** : Il est évident que la relation est réflexive, pour tout compact  $K$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1([N, +\infty[) \subset X \setminus K$  (car c'est un rayon **propre**) et il est donc contenu dans une composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ .
- **Symétrie** : C'est évident par définition de la relation.
- **Transitivité** : On suppose que  $r_1$  et  $r_2$  convergent vers le même bout et que  $r_2$  et  $r_3$  convergent vers le même bout. Montrons que  $r_1$  et  $r_3$  convergent vers le même bout. Soit  $K$  un compact de  $X$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1([N_1, +\infty[)$  et  $r_2([N_1, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . De même, il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $r_2([N_2, +\infty[)$  et  $r_3([N_2, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . On pose  $N = \max(N_1, N_2)$  comme  $r_1, r_2$  et  $r_3$  sont des applications continues :  $r_1([N, +\infty[)$  est dans la même composante connexe par arcs que  $r_1([N_1, +\infty[)$  qui est dans la même composante connexe par arcs que  $r_2([N_1, +\infty[)$  qui est dans la même composante connexe par arcs que  $r_2([N_2, +\infty[)$  qui est dans la même composante connexe par arcs que  $r_3([N_2, +\infty[)$  qui est dans la même composante connexe par arcs que  $r_3([N, +\infty[)$ . La relation est bien transitive. □

Ceci va nous permettre de définir l'espace des bouts de  $X$ .

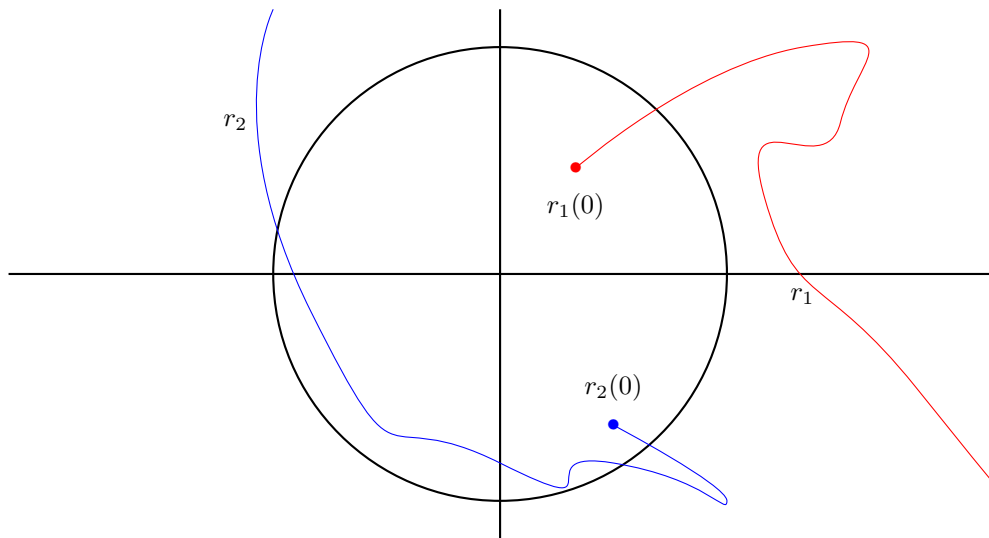
**Définition 3.5.** Soit  $r$  un rayon propre, on note  $\text{bt}(r)$  la classe d'équivalence de  $r$  via la relation «converger vers le même bout». On note l'ensemble de ces classes d'équivalences  $\text{Bt}(X)$  et on dit que c'est l'**espace des bouts** de  $X$ . Si le cardinal de  $\text{Bt}(X)$  est égal à  $m$  on dit que  $X$  a  $m$  **bouts**.

**Exemple.** Voici quelques exemples élémentaires, on a représenté chaque exemple par un schéma et sur chaque schéma (sauf le dernier), on représente un compact par un cercle qui n'est pas forcément représentatif d'une vraie boule dans l'espace représenté :

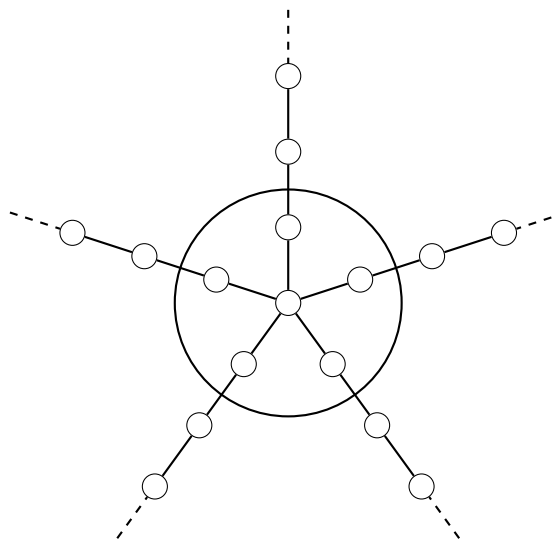
- L'espace topologique  $\mathbb{R}$  (muni de sa topologie usuelle) a deux bouts dont des représentants sont données ci-dessous :



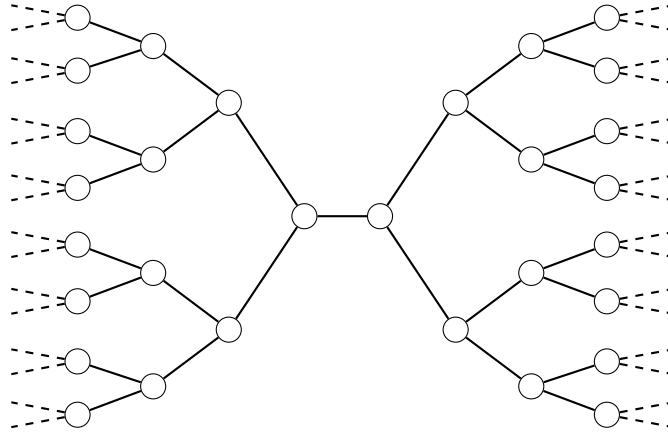
- L'espace topologique  $\mathbb{R}^2$  (muni de sa topologie usuelle) a un seul bout, on donne deux représentants du même bout dans le schéma ci-dessous :



- Plus généralement, grâce à la réalisation géométrique des graphes, on peut créer un espace topologique avec un nombre arbitraire de bouts. On représente ci-dessous la réalisation d'un graphe avec 5 bouts :



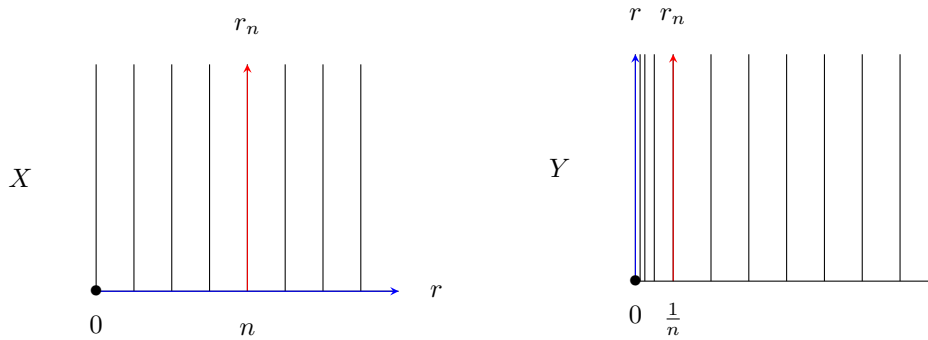
- Enfin, un exemple d'espace topologique avec une infinité de bouts est la réalisation géométrique de l'arbre  $T_3$  où chaque sommet a un degré égal à 3.



On définit ensuite une notion de convergence sur l'espace des bouts.

**Définition 3.6.** Soit  $(\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\text{Bt}(X)$ . On dit que  $(\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un bout  $\text{bt}(r)$  si pour tout compact  $K \subset X$  il existe une suite d'entiers  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n$  assez grand  $r_n([N_n, +\infty[)$  et  $r([N_n, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ .

**Exemple.** On donne ici deux exemples d'espaces métriques que l'on appelle «peigne».



Dans  $X$ , la suite  $(\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** bien vers  $\text{bt}(r)$  dans  $\text{Bt}(X)$ . Cependant, dans  $Y$ , la suite  $(\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  **ne converge pas** vers  $\text{bt}(r)$  dans  $\text{Bt}(Y)$ .

On définit ensuite une topologie sur  $\text{Bt}(X)$  de la manière suivante :

**Définition 3.7.** Soit  $\text{Bt}(X)$  l'espace des bouts de  $X$ . On dit qu'un sous ensemble  $F \subset \text{Bt}(X)$  est fermé si pour toute suite de bouts  $((\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  contenue dans  $F$  le fait que la suite converge vers  $\text{bt}(r)$  implique que  $\text{bt}(r) \in F$ . Ceci définit une topologie sur  $\text{Bt}(X)$ .

**Remarque.** Vérifions rapidement que les fermés ainsi définis ont les propriétés attendues des fermés dans une topologie. Il est évident que  $\text{Bt}(X)$  et  $\emptyset$  sont des fermés par cette définition. Si  $(B_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de fermés alors  $B = \bigcap_{i \in I} B_i$  est aussi un fermé. Si on prend une suite  $((\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  contenue dans  $B$  convergeant vers  $\text{bt}(r)$  alors comme pour tout  $i \in I$ ,  $((\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $B_i$  qui sont des fermés on en déduit  $\text{bt}(r) \in B_i$  pour tout  $i \in I$  et donc  $\text{bt}(r) \in B$ . Enfin, si  $n \in \mathbb{N}$  et  $B_1, \dots, B_n$  sont des fermés de  $\text{Bt}(x)$ , montrons que  $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$  est aussi un fermé. Soit  $((\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $B$  convergeant vers  $\text{bt}(r)$ , alors il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $B_i$  contient une infinité de termes de la suite, alors la suite extraite composé de ces éléments converge toujours vers  $\text{bt}(r)$ . On en déduit que  $\text{bt}(r) \in B_i \subset B$ . On a bien défini une topologie.

### 3.2 Propriétés de l'espace des bouts

L'objectif de cette sous partie va être de montrer quelques propriétés de l'espace des bouts et en particulier que c'est un invariant par quasi-isométrie.

Définissons tout d'abord la notion suivante :

**Définition 3.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, un  $k$ -**chemin** joignant deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  est une suite finie de points  $x = x_1, \dots, x_n = y$  de  $X$  tel que :  $d(x_i, x_{i+1}) \leq k$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

On peut ensuite montrer les propriétés suivantes :

**Proposition 3.9.** *Soient  $X$  un espace géodésique propre,  $k > 0$  et  $r_1, r_2$  deux rayons propres de  $X$ . On note  $\mathcal{G}_{x_0}(X)$  l'ensemble des **rayons géodésiques** partant de  $x_0 \in X$ . Alors :*

1. *On a l'égalité  $\text{bt}(r_1) = \text{bt}(r_2)$  si et seulement si pour tout  $R > 0$  il existe  $T > 0$  tel que  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  peuvent être connectés par un  $k$ -chemin dans  $B(x_0, R)^c$  pour  $t > T$ .*
2. *L'application naturelle  $\mathcal{G}_{x_0}(X) \rightarrow \text{Bt}(X)$  est surjective.*
3. *Soient  $r \in \mathcal{G}_{x_0}(X)$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $\tilde{V}_n \subset \mathcal{G}_{x_0}(X)$  l'ensemble des rayons propres  $r'$  tels que  $r([n, +\infty[)$  et  $r'([n, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $B(x_0, n)^c$ . Les ensembles de la forme  $V_n = \{\text{bt}(r') \mid r' \in \tilde{V}_n\}$  forment une base de voisinages pour  $\text{bt}(r)$  dans  $\text{Bt}(X)$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que chaque compact de  $X$  est borné donc contenu dans une boule ouvert de centre  $x_0$ . De même toute boule ouverte  $B$  est contenue dans un compact (par exemple  $\overline{B}$ ). On peut donc remplacer les compacts par des boules ouvertes dans les définitions de  $\text{Bt}(X)$ .

1. Par la remarque ci-dessus, comme on peut remplacer les compacts par les boules ouvertes dans la définition, avoir un  $k$ -chemin entre deux points implique d'avoir un chemin (on peut relier les points de la suite par des géodésiques et on obtient un chemin continu en les concaténant). Ceci implique que  $r_1$  et  $r_2$  convergent vers le même bout. Inversement, si deux rayons convergent vers le même bout alors pour tout  $R > 0$  il existe  $T > 0$  tel que  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $B(x_0, R)^c$  pour tout  $t > T$ . Puis comme l'espace est géodésique, pour obtenir un  $k$ -chemin, il suffit de prendre un chemin joignant  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  dans  $B(x_0, R)^c$ , par exemple en considérant une subdivision avec un pas assez petit et joindre les points par des géodésiques.
2. Soit  $r : [0, +\infty[ \rightarrow X$  un rayon propre. On considère la suite  $c_n : [0, d_n] \rightarrow X$  de géodésiques joignant  $x_0$  à  $r(n)$ . On étend  $c_n$  de manière constante sur  $[d_n, +\infty[$ . Comme l'espace  $X$  est propre, d'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite de  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge en un rayon géodésique  $c : [0, +\infty[ \rightarrow X$  tel que  $\text{bt}(c) = \text{bt}(r)$  et  $c(0) = x_0$ .
3. Le 2. ainsi que la remarque ci-dessus implique 3.

□

On va ensuite pouvoir montrer la proposition suivante :

**Proposition 3.10.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques **non vides, séparés, localement compacts, connexes, localement connexes par arcs et ayant une base dénombrable d'ouverts**. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et propre, alors  $f$  induit une application continue  $\tilde{f} : \text{Bt}(X) \rightarrow \text{Bt}(Y)$ .*

*Démonstration.* Soit  $r$  un rayon propre de  $X$ . Montrons que  $f \circ r$  est aussi un rayon propre de  $Y$ . Par composition d'applications continues,  $f \circ r : [0, +\infty[ \rightarrow Y$  est une application continue. De plus, les applications  $r$  et  $f$  sont propres donc si  $K \subset Y$  est un compact alors  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $X$  et donc que  $r^{-1}(f^{-1}(K))$  est un compact de  $[0, +\infty[$ . Ainsi, l'application  $f \circ r$  est une application propre. On pose alors :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \text{Bt}(X) &\rightarrow \text{Bt}(Y) \\ \text{bt}(r) &\mapsto \text{bt}(f \circ r) \end{aligned}$$

Montrons dans un premier temps que cette application est bien définie sur les classes d'équivalences. C'est-à-dire que si  $\text{bt}(r_1) = \text{bt}(r_2)$  alors  $\text{bt}(f \circ r_1) = \text{bt}(f \circ r_2)$ . Prenons donc  $r_1$  et  $r_2$  deux rayons propres de  $X$  tel que  $\text{bt}(r_1) = \text{bt}(r_2)$ . Soit  $K \subset Y$  un compact. On sait que  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $X$  et qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1([N_0, +\infty[)$  et  $r_2([N_0, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe de  $f^{-1}(K)^c$ . Ainsi, pour tout  $t, t' \geq N_0$  il existe un chemin  $\gamma_{t, t'}$  dans cette composante connexe par arcs reliant  $r_1(t)$  et  $r_2(t')$ . Comme  $f$  est continue  $f \circ \gamma_{t, t'}$  est un chemin reliant  $f \circ r_1(t)$  et  $f \circ r_2(t')$ . Et ce chemin ne passe pas par  $K$  car  $\text{Im}(\gamma_{t, t'}) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$ . Ceci implique que  $f \circ r_1([N_0, +\infty[)$  et  $f \circ r_2([N_0, +\infty[)$  sont bien dans la même composante connexe de  $K^c$  et donc que  $\text{bt}(f \circ r_1) = \text{bt}(f \circ r_2)$ .

Montrons ensuite que  $\tilde{f}$  est continue. Soit  $F$  un fermé de  $\text{Bt}(Y)$ , montrons que  $\tilde{f}^{-1}(F)$  est un fermé de  $\text{Bt}(X)$ . Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rayons propres de  $X$  telle que  $(\text{bt}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\tilde{f}^{-1}(F)$  convergeant vers  $\text{bt}(r)$ . On a  $\tilde{f}(\text{bt}(r_n)) = \text{bt}(f \circ r_n)$ , montrons que  $\text{bt}(f \circ r_n)$  converge vers  $\text{bt}(f \circ r)$ . Soit  $K$  un compact de  $Y$ ,  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $X$ . Il existe donc une suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $r_n([N_n, +\infty[)$  est dans la même composante connexe de  $f^{-1}(K)$  que  $r([n, +\infty[)$  pour  $n$  assez grand. Ainsi pour tout  $t, t' \geq N_n$  les points  $r_n(t)$  et  $r(t')$  peuvent être reliés par un chemin  $\gamma$  ne passant pas par  $f^{-1}(K)$ . Ceci implique que  $f \circ r_n(t)$  et  $f \circ r(t')$  sont reliés par un chemin ne passant pas par  $K$  et donc que pour  $n$  assez grand  $f \circ r_n([N_n, +\infty[)$  et  $f \circ r([N_n, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $K^c$ .

□

Ceci induit de manière évidente le corollaire suivant :

**Corollaire.** Une action continue et propre d'un groupe  $G$  sur  $X$  induit une action continue de  $G$  sur  $\text{Bt}(X)$ .

On montre ensuite que l'espace des bouts est un invariant pas quasi-isométrie, c'est en réalité un cas voisin du résultat précédent :

**Proposition 3.11.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  des espaces géodésiques propres. Toute quasi-isométrie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  induit un homéomorphisme  $f_\epsilon : \text{Bt}(X_1) \rightarrow \text{Bt}(X_2)$ .

*Démonstration.* Soit  $r$  un rayon géodésique de  $X_1$  et on pose  $f_*(r)$  le rayon de  $X_2$  obtenu en concaténant les (ou un choix de) segments géodésiques liant  $f \circ r(n)$  et  $f \circ r(n+1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que ce rayon est un rayon propre de  $X_2$ . Soit  $K$  un compact de  $X_2$ , on sait qu'il est contenu dans une boule  $B(y_0, R)$  avec  $R > 0$ . Puis  $f$  est une quasi-isométrie donc il existe  $\epsilon \geq 0$  et  $\lambda \geq 1$  tels que :

$$\frac{1}{\lambda}d_{X_1}(x, x') - \epsilon \leq d_{X_2}(f(x), f(x')) \leq \lambda d_{X_1}(x, x') + \epsilon$$

Et il existe  $C \geq 0$  tel que pour tout  $y \in X_2$ , il existe  $x \in X_1$  tel que  $d_{X_2}(f(x), y) \leq C$ . Ainsi, il existe donc  $x_0$  tel que  $d_{X_2}(f(x_0), y_0) \leq C$ . On a alors pour  $x \in f^{-1}(B(y_0, R))$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}d_{X_1}(x, x_0) - \epsilon &\leq d_{X_2}(f(x), f(x_0)) \\ &\leq d_{X_2}(f(x), y_0) + d_{X_2}(f(x_0), y_0) \\ &\leq R + C \end{aligned}$$

Ce qui implique  $d_{X_1}(x, x_0) \leq \lambda(R + \epsilon + C)$  et donc  $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(y_0, R)) \subset B(x_0, \lambda(R + \epsilon + C))$ . Comme  $r$  est un rayon propre, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $r([N, +\infty]) \cap B(x_0, \lambda(R + \epsilon + C)) = \emptyset$ . On prend  $n$  minimal. Si  $n = 0$  alors clairement  $f_*(r)^{-1}(K) = \emptyset$  qui est compact. Autrement si on note  $\gamma_i$  les géodésiques joignant  $f(r(i))$  et  $f(r(i+1))$  alors :

$$f_*(r)^{-1}(K) = \bigcup_{i=0}^n \gamma_i^{-1}(K)$$

Et comme les  $\gamma_i$  sont des géodésiques, les  $\gamma_i^{-1}(K)$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^+$  donc  $f_*(r)^{-1}(K)$  aussi. Ensuite, il est clair que  $\text{bt}(f_*(r))$  est indépendant du choix des géodésiques entre  $f(r(n))$  et  $f(r(n+1))$ .

On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_\epsilon : \text{Bt}(X_1) &\rightarrow \text{Bt}(X_2) \\ \text{bt}(r) &\mapsto \text{bt}(f_*(r)) \end{aligned}$$

On suppose aussi que les rayons  $r$  sont géodésiques (par la proposition 3.10). Comme l'image d'un  $k$ -chemin de  $X_1$  par  $f$  est un  $\lambda k + \epsilon$  chemin de  $X_2$  alors par la proposition 3.10, l'application est bien définie sur les classes d'équivalences et elle est continue. Puis encore par la proposition 3.10, l'application est bien définie sur tout  $\text{Bt}(X_1)$ .

Enfin, si  $g : X_2 \rightarrow X_1$  est une quasi-isométrie qui est quasi-inverse à  $f$  (c'est-à-dire que  $d_{X_1}(g \circ f(x), x) \leq C$  pour tout  $x \in X_1$ ) alors on a clairement  $f_\epsilon \circ g_\epsilon = (f \circ g)_\epsilon$ .

Ensuite, montrons que pour tout rayon géodésique  $r$  de  $X_1$ , on a  $\text{bt}(r) = \text{bt}(g_*(f_*(r)))$ . Soit  $K$  un compact de  $X_1$ , montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $r([N, +\infty])$  et  $g_*(f_*(r))([N, +\infty])$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $K^c$ . On prend  $N \in \mathbb{N}$  minimal tel que  $r([N, +\infty])$  est contenu dans une composante connexe par arcs de  $K^c$ . On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_{X_1}(r(n), g_*(f_*(r))(n)) \leq C$ . Comme  $X_1$  est un espace géodésique, il existe une géodésique  $\gamma$  de longueur inférieure à  $C$  joignant  $r(n)$  et  $g_*(f_*(r))(n)$ . Or si  $n \geq N + C + 1$ , cela implique que  $r(n)$  et  $g_*(f_*(r))(n)$  sont dans la même composante connexe. En effet, puisque  $r$  est une géodésique alors la distance entre chaque point de  $K$  (ou des autres composantes connexes) et  $r(t)$  est supérieure à  $C + 1$  pour  $t \geq N + C + 1$ . Puis comme, les points  $g_*(f_*(r))(n)$  et  $g_*(f_*(r))(n+1)$  sont liés par des géodésiques, on reste forcément dans la même composante connexe. Ainsi,  $\text{bt}(r) = \text{bt}(g_*(f_*(r)))$  et donc  $f_\epsilon \circ g_\epsilon = (f \circ g)_\epsilon$  est l'identité sur  $\text{Bt}(X_1)$ ,  $f_\epsilon$  est bien un homéomorphisme. □

On peut aussi montrer les propriétés topologiques suivantes sur l'espace des bouts :

**Proposition 3.12.** L'espace topologique  $\text{Bt}(X)$  est un espace topologique séparé et totalement discontinu.

*Démonstration.* Montrons que l'espace est séparé. Soit  $b_1$  et  $b_2$  deux bouts distincts de  $\text{Bt}(X)$ . Il existe donc deux rayons propres  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $b_1 = \text{bt}(r_1)$  et  $b_2 = \text{bt}(r_2)$ . Comme les bouts sont distincts il existe  $K$  un compact de  $X$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on ait que  $r_1([N, +\infty[)$  et  $r_2([N, +\infty[)$  ne sont pas dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . On note  $C_1$  la composante connexe par arcs de  $r_1([N, +\infty[)$  dans  $X \setminus K$  et  $C_2$  celle de  $r_2([N, +\infty[)$  dans  $X \setminus K$ .

On pose ensuite  $U_1$  l'ensemble des éléments de  $\text{Bt}(X)$  tel que pour tout  $b \in U_1$ , pour tout rayon propre  $r$  vérifiant  $\text{bt}(r) = b$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $r([N, +\infty[) \subset C_1$ . On pose de manière similaire l'ensemble  $U_2$ . Il est évident que  $b_1 \in U_1$  et  $b_2 \in U_2$ .

Montrons que  $U_1$  et  $U_2$  sont des ouverts. On considère une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $U_1^c$  convergeant vers un bout  $b$ . Montrons que  $b \in U_1^c$ . Par définition, si on reprend le compact  $K$  défini au début de la preuve, il existe une suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n$  assez grand  $r_n([N_n, +\infty[)$  et  $r([N_n, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . Puis comme la suite est dans  $U_1^c$  cette composante connexe n'est pas  $C_1$ . Donc  $b \in U_1^c$  ce qui implique que  $U_1$  est ouvert. On montre de la même façon que  $U_2$  est ouvert. L'espace est bien séparé.

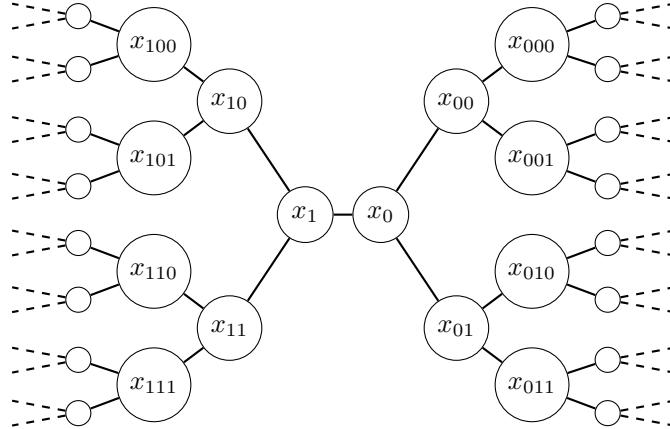
Montrons maintenant que l'espace est totalement discontinu. Pour cela, on doit montrer que les seules parties connexes sont les singletons et l'ensemble vide. Soit  $F$  une partie de  $\text{Bt}(X)$  contenant au moins deux éléments distincts  $b_1$  et  $b_2$ . Encore une fois, il existe deux rayons propres  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $b_1 = \text{bt}(r_1)$  et  $b_2 = \text{bt}(r_2)$ . Et de même, comme les bouts sont distincts il existe  $K$  un compact de  $X$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on ait que  $r_1([N, +\infty[)$  et  $r_2([N, +\infty[)$  ne sont pas dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ .

On pose comme précédemment  $C_1$  et l'ensemble  $U_1$ . Montrons que  $U_1$  est fermé. On considère une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $U_1$  convergeant vers un bout  $b$ . Montrons que  $b \in U_1$ . Encore une fois on prend le compact  $K$  défini précédemment. Par définition, il existe une suite  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n$  assez grand  $r_n([N_n, +\infty[)$  et  $r([N_n, +\infty[)$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . Et cette composante connexe par arcs est  $C_1$  par définition de  $U_1$ . Ceci montre que  $b \in U_1$  et donc que  $U_1$  est fermé.

Ainsi,  $U_1$  est à la fois ouvert et fermé. De plus,  $b_1 \in U_1 \cap F$  et que  $b_2 \in U_1^c \cap F$ . Enfin, on a évidemment  $U_1 \cup U_1^c = \text{Bt}(X) \supset F$ . Ceci implique que  $F$  n'est pas connexe et que  $X$  est donc totalement discontinu.  $\square$

Voyons enfin un exemple assez concret.

**Exemple.** Soit  $T_3$ , la réalisation géométrique de l'arbre où chaque sommets à un degré égal à 3. On va montrer ici que  $\text{Bt}(T_3)$  est homéomorphe à l'espace de Cantor. On rappelle que l'espace de Cantor peut être vu comme l'ensemble :  $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  muni de la topologie produit et où les  $\{0, 1\}$  sont munis de la topologie discrète. On sait aussi que  $T_3$  est un espace géodésique propre. Prenons  $x_0$  un sommet de  $T_3$  on nomme un de ses voisins  $x_1$  et ses deux autres  $x_{00}$  et  $x_{01}$ . On fait de même pour les autres voisins de  $x_1$  que l'on nomme  $x_{10}$  et  $x_{11}$ . On recommence ensuite avec les sommets que l'on vient de nommer (qui sont donc de la forme  $x_X$  où  $X \in \{0, 1\}^2$  et ainsi de suite. On obtient alors le schéma suivant :



Ensuite, à chaque  $s \in C$  on associe le rayon géodésique  $r_s$  correspondant à la concaténation des géodésiques joignant  $x_{s_0 s_1 \dots s_n}$  et  $x_{s_0 s_1 \dots s_{n+1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : C &\rightarrow \text{Bt}(T_3) \\ s &\mapsto \text{bt}(r_s) \end{aligned}$$

On va montrer que c'est un homéomorphisme. L'application est injective, en effet si  $s \neq s'$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $s(n) \neq s'(n)$  donc  $s([n+1, +\infty[)$  et  $s'([n+1, +\infty[)$  ne sont pas dans la même composante connexe par arcs (ici une branche) de  $B(x_0, n+1)^c$  et ne convergent donc pas vers le même bout.



L'application est surjective, en effet, c'est une conséquence de la proposition 3.9, car pour chaque rayon géodésique  $r$  partant de  $x_0$  on a  $r(n) = x_{s_0 s_1 \dots s_n}$  où  $s \in C$ . Et comme les rayons géodésiques partant de  $x_0$  suffisent pour définir les bouts de  $T_3$ , on a la surjectivité.

Montrons que l'application est continue. Soit  $(s^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $C$  convergeant vers  $s \in C$ . Montrons que  $\psi(r_{s^n})$  converge vers  $\psi(r_s)$ . Par définition de la topologie sur  $C$ , on sait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait :  $s_i^n = s_i$  pour tout  $i \leq k$ . Cela signifie que pour toute boule ouverte  $B(x_0, k)$ , les ensembles  $r_{s^n}([k, +\infty[)$  pour  $n \geq n_0$  sont dans la même composante connexe par arcs de  $B(x_0, k)^c$  que  $r_s([k, +\infty[)$  et donc que  $(\text{bt}(r_{s^n}))$  converge vers  $\text{bt}(r_s)$  ce qui implique que  $\psi$  est continue.

On procède de la même manière pour l'application réciproque et on montre bien que les deux espaces sont homéomorphes.

On peut aussi montrer que les réalisations géométriques respectives des arbres de degré constant égal à  $n$  sont toutes quasi-isométriques et donc que l'espace des bouts des réalisations géométriques de ces arbres est homéomorphe à l'espace de Cantor.

### 3.3 Bouts des Groupes

Nous avons montré dans la sous-partie précédente que l'espace des bouts était un invariant de quasi-isométrie, ce résultat nous permet de bien définir l'espace des bouts d'un groupe.

**Définition 3.13.** Soit  $G$  un groupe de type fini. On définit l'espace des bouts de  $G$  comme l'espace des bouts de la réalisation géométrique de son graphe de Cayley. On le note  $\text{Bt}(G)$  et on a alors  $\text{Bt}(G) = \text{Bt}(\text{real}(\Gamma(G, S)))$  pour tout ensemble  $S$  fini de générateurs de  $G$ .

**Remarque.** On sait que l'action par translation à gauche de  $G$  sur la réalisation géométrique de son graphe de Cayley induit une action de  $G$  sur son espace des bouts (par la proposition 3.10). Si  $\text{Bt}(G)$  est **fini**, alors l'espace  $\text{Homéo}(\text{Bt}(G))$  l'est aussi, ainsi si on note  $\sigma : G \rightarrow \text{Homéo}(\text{Bt}(G))$  l'action de  $G$  sur son espace des bouts. Le sous-groupe  $\ker(\sigma)$  de  $G$  est donc un sous-groupe d'indice fini de  $G$  (par la propriété universelle du quotient). Ainsi  $\ker(\sigma)$  et  $G$  sont quasi-isométriques et ont donc le même espace des bouts. Dans la suite, si  $\text{Bt}(G)$  est fini on pourra donc considérer que l'action de  $G$  sur  $\text{Bt}(G)$  est triviale quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini.

#### Exemple.

- Si  $G$  est un groupe fini, la réalisation géométrique de son graphe de Cayley est un espace métrique borné d'où  $\text{Bt}(G) = \emptyset$ .
- Le groupe  $\mathbb{Z}$  est quasi-isométrique à  $\mathbb{R}$  et possède donc deux bouts. L'espace topologique  $\text{Bt}(\mathbb{Z})$  est un espace à deux éléments muni de la topologie discrète.
- Le groupe  $\mathbb{Z}^2$  est quasi-isométrique à  $\mathbb{R}^2$  et possède donc un unique bout et  $\text{Bt}(\mathbb{Z}^2)$  est donc trivial.

On a un premier résultat intéressant et fondamental dans l'étude des bouts des groupes.

**Théorème 3.14.** Soit  $G$  un groupe de type fini. Le groupe  $G$  possède 0, 1, 2 ou une infinité de bouts.

*Démonstration.* Soient  $G$  un groupe de type fini et  $S$  un ensemble fini de générateurs de  $G$ . On note  $C = \text{real}(\Gamma(G, S))$ . Supposons que  $C$  ait un nombre fini de bouts supérieur à 3. Prenons trois bouts  $b_1, b_2, b_3 \in \text{Bt}(C)$  distincts. On pose trois rayons géodésiques propres  $r_1, r_2$  et  $r_3$  avec  $r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 1_G$  et  $\text{bt}(r_1) = b_1$ ,  $\text{bt}(r_2) = b_2$  et  $\text{bt}(r_3) = b_3$  (on a le droit d'après la proposition 3.9). Comme les bouts sont différents, il existe  $R > 0$  tel que  $r_1([R, +\infty[)$ ,  $r_2([R, +\infty[)$  et  $r_3([R, +\infty[)$  sont dans trois composantes connexes par arcs différentes de  $C \setminus B(1_G, R)$ .

Comme  $X$  est un espace géodésique, si  $t, t' \geq 2R$  alors :

$$d(r_1(t), r_2(t')) > 2R$$

Car chaque chemin et donc chaque géodésique entre  $r_1(t)$  et  $r_2(t')$  doit passer par la boule  $B(1_G, R)$  qui sépare  $r_1([R, +\infty[)$  et  $r_2([R, +\infty[)$ .

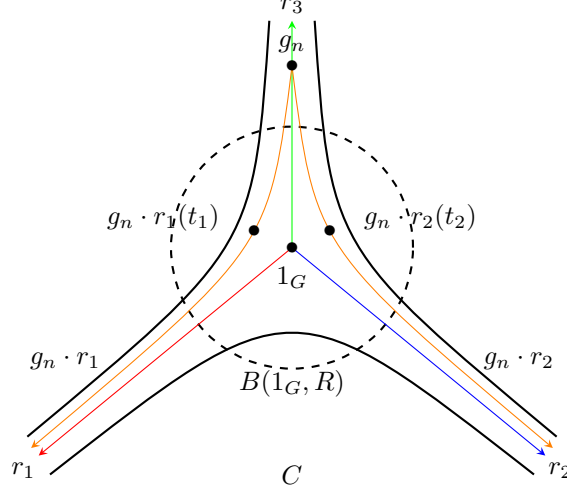
On peut supposer (quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini) que  $G$  agit trivialement sur ses bouts. Posons les éléments  $g_n = r_3(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , on va les faire agir sur les rayons. Les rayons  $g_n \cdot r_1$  et  $g_n \cdot r_2$  représentent toujours les bouts  $b_1$  et  $b_2$  respectivement. Prenons  $n > 3R$  et  $j \in \{1, 2\}$ . L'élément  $g_n = r_3(n) \in r_3([R, +\infty[)$  est dans une composante connexe de  $C \setminus B(1_G, R)$  différente de celles de  $r_j([R, +\infty[)$ . Mais comme  $g_n \cdot r_j$  représente le même bout que  $r_j$  et que  $g_n \cdot r_j(0) = g_n \cdot 1_G = g_n$  alors le rayon  $g_n \cdot r_j$  doit passer par  $B(1_G, R)$  pour rejoindre

l'autre composante connexe. Et comme  $n \geq 3R$  on peut trouver  $t_j > 2R$  tel que  $g_n \cdot r_j(t_j) \in B(1_G, R)$ . En particulier, comme  $G$  agit sur  $C$  par isométrie :

$$d(r_1(t_1), r_2(t_2)) = d(g_n \cdot r_1(t_1), g_n \cdot r_2(t_2)) \leq d(g_n \cdot r_1(t_1), 1_G) + d(1_G, g_n \cdot r_2(t_2)) \leq 2R$$

Et on obtient donc une contradiction.

On peut résumer la preuve avec le schéma suivant :



Il n'existe donc pas de groupes avec un nombre fini de bouts strictement supérieur à 2. □

**Remarque.** Le théorème précédent nous fournit un critère simple pour déterminer si il existe un groupe quasi-isométrique (et donc si un groupe peut agir proprement, cocompactement et par isométries) à tel ou tel espace. Par exemple, aucun groupe n'est quasi-isométrique à l'espace  $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$  qui possède 4 bouts.

Notre prochain objectif va être de caractériser les groupes avec un certain nombre de bouts.

Dans un premier temps, on sait qu'un espace géodésique propre (ou un espace topologique avec les hypothèses de la partie 3.1) a 0 bouts si et seulement si il est borné (ou compact). Et on sait aussi que la réalisation géométrique du graphe de Cayley d'un graphe est bornée si et seulement si ce graphe est fini. On a donc le théorème suivant :

**Théorème 3.15.** *Le nombre de bouts d'un groupe est 0 si et seulement si il est fini.*

Voici le théorème qui caractérise les groupes à deux bouts.

**Théorème 3.16.** *Un groupe  $G$  possède 2 bouts si et seulement si  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$  alors  $G$  et  $\mathbb{Z}$  sont quasi-isométriques et ont donc le même espace des bouts. Le groupe  $G$  a donc bien deux bouts.

Supposons que  $G$  ait deux bouts  $b_1, b_2$  et montrons dans un premier temps que  $G$  contient un élément d'ordre infini. Encore une fois, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini on peut supposer que  $G$  agit trivialement sur ses bouts. Notons  $C$  la réalisation géométrique du graphe de Cayley de  $G$ . Il existe donc  $R > 0$  tel que  $B(1_G, R)$  sépare  $C$  en deux composantes connexes non bornées distinctes  $C_1$  et  $C_2$ .

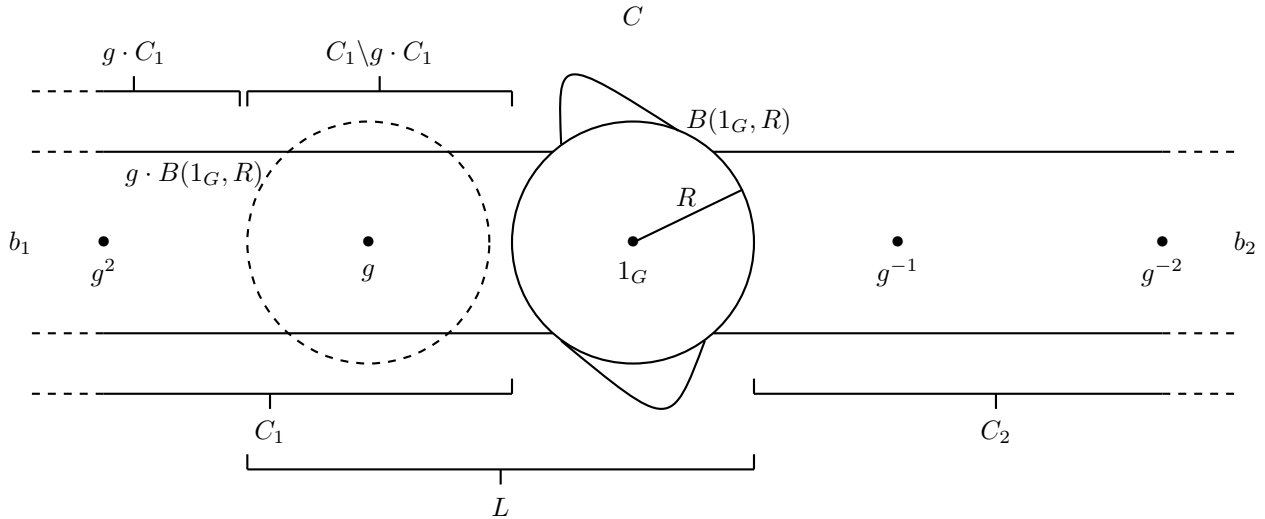
Prenons  $g$  tel que  $d(1_G, g) > 2R$ , on a alors  $g \cdot B(1_G, R) \cap B(1_G, R) = \emptyset$ . En effet, le groupe  $G$  agit sur  $C$  par isométries donc si il existe  $g' \in g \cdot B(1_G, R) \cap B(1_G, R)$  alors  $d(1_G, g) \leq d(1_G, g') + d(g', g) \leq 2R$  ce qui n'est pas possible. On peut supposer que  $g \cdot B(1_G, R) \subset C_1$ . On veut maintenant montrer que  $g \cdot C_1 \subset C_1$ . Supposons qu'il existe  $x \in C_1$  tel que  $g \cdot x \in C_2 \cup B(1_G, R)$ .

Soit  $r_1$  un rayon géodésique tel que  $r_1(0) = x$  et  $\text{bt}(r_1) = b_1$ . Ce rayon ne passe pas par  $B(1_G, R)$  car il est géodésique. Le rayon géodésique  $g \cdot r_1$  ne passe donc pas par  $g \cdot B(1_G, R)$ . Mais  $g$  fixe les bouts et donc en particulier  $\text{bt}(g \cdot r_1) = b_1$  cela signifie donc que  $g \cdot B(1_G, R)$  ne sépare pas  $C$  en deux composantes connexes par arcs. Mais ceci n'est pas possible car si on a un chemin  $\gamma$  entre  $x_1 \in g \cdot C_1$  et  $x_2 \in g \cdot C_2$  ne passant pas par  $g \cdot B(1_G, R)$  alors  $g^{-1} \cdot \gamma$  est un chemin ne passant pas par  $B(1_G, R)$  et reliant  $g^{-1} \cdot x_1 \in C_1$  et  $g^{-1} \cdot x_2 \in C_2$  ce qui est impossible. Donc  $g \cdot B(1_G, R)$  sépare bien  $C$  en deux composantes connexes par arcs  $g \cdot C_1$  et  $g \cdot C_2$ . On en déduit que  $g \cdot C_1 \subset C_1$ . Par suite comme  $g \in C_1$  alors par récurrence immédiate  $g^n \in C_1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $g^n \neq 1_G$  pour tout  $n$  ainsi  $g$  est d'ordre infini.

Montrons maintenant que le sous-groupe engendré par  $g$  (qui est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) est un sous-groupe d'indice fini de  $G$ . Montrons dans un premier temps que,  $C_1 \setminus g \cdot C_1$  est relativement compact. En effet, si on considère le compact  $B(1_G, R) \cup g \cdot B(1_G, R)$  on connaît déjà deux composantes non relativement compactes de  $(B(1_G, R) \cup g \cdot B(1_G, R))^c$ , ce sont  $g \cdot C_1$  et  $C_2$  et comme  $G$  a deux bouts ce sont les seules. Ceci implique que  $C_1 \setminus g \cdot C_1$  est forcément relativement compact (et donc borné) car non contenu dans  $g \cdot C_1 \cup C_2$ .

Posons ensuite  $L = (C_1 \setminus g \cdot C_1) \cup B(1_G, R)$  et montrons que  $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} g^n \cdot L = C$ . Pour tout  $y \in C_1$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $y \in g^n \cdot (B(1_G, R) \cup C_1)$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k > n$  on ait  $y \notin g^k \cdot (B(1_G, R) \cup C_1)$  ce qui implique donc que  $y \in g^n \cdot L$ . On peut faire de même pour  $y \in C_2$  en prenant  $g^{-1}$  à la place de  $g$  et finalement on trouve bien que  $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} g^n \cdot L = C$ . Or comme  $L$  est borné, le nombre d'éléments du groupe qu'il contient est fini ce qui implique que le sous-groupe engendré par  $g$  (qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ) est d'indice fini dans  $G$ .

On peut résumer la situation avec le schéma suivant :



□

Avant de s'attaquer à la caractérisation des groupes avec un nombre infini de bouts montrons déjà ce résultat.

**Théorème 3.17.** *L'espace  $Bt(G)$  est compact. S'il est infini alors il n'est pas dénombrable et chacun de ses points est un point d'accumulation.*

*Démonstration.* On admet la compacité de l'espace des bouts. Une preuve utilisant le théorème d'Ascoli se trouve dans la démonstration du point 4 du théorème 8.32 de [3].

Montrons maintenant que tout  $b \in Bt(G)$  est un point d'accumulation. Soient  $b_1$  et  $b_2$  des bouts de  $G$ . On pose  $D = D(b_1, b_2)$  le plus grand entier tel que  $r_1([D, +\infty[)$  et  $r_2([D, +\infty[)$  soient dans la même composante connexe par arcs de  $C \setminus B(1_G, D)$  avec  $r_i$  des rayons géodésiques et tels que  $bt(r_i) = b_i$  et  $r_i(0) = 1_G$ .

Fixons  $e_0 \in Bt(G)$  et un rayon géodésique  $r_0$  tel que  $r_0(0) = 1_G$  et  $bt(r_0) = e_0$ . Posons  $g_n = r_0(n)$ , construisons une suite de bouts  $e^n$  tel que  $e^n \neq e_0$  pour tout  $n$  et  $D(e^n, e_0) \rightarrow +\infty$  ce qui équivaut à  $e^n \rightarrow e_0$ .

Soient  $e_1$  et  $e_2$  des bouts distincts de  $e_0$  et  $r_i$  un rayon géodésique tel que  $bt(r_i) = e_i$  et  $r_i(0) = 1_G$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Posons  $M = \max(D(e_i, e_j))$  pour  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  distincts. Posons  $R > M$  et comme pour la preuve du théorème 3.14 au plus un des rayons  $g_n \cdot r_i$  peut traverser la boule  $B(1_G, R)$  pour  $n$  assez grand. Pour les deux autres rayons  $g_n \cdot r_j$  on applique le théorème d'Ascoli et on peut alors construire un rayon géodésique  $r'_j$  tel que  $r'_j(0) = 1_G$  et  $e'_j = bt(r'_j) = bt(g_n \cdot r_j)$ .

Comme  $r_0$  et  $r'_j$  ont des segments terminaux dans la même composante connexe par arcs de  $C \setminus B(1_G, R)$  on a  $D(e_0, e'_j) > R$ . Comme les  $e'_j$  sont distincts, au moins un des deux (ou des trois) est différent de  $e_0$  on le renomme  $e^1$ .

On peut maintenant itérer l'argument en remplaçant  $e_1$  par  $e^1$ , on obtiendra un rayon  $e^2$  et ainsi de suite. On obtient bien la suite  $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$  voulue.

Enfin, un résultat classique de topologie nous dit qu'un espace séparé (c'est bien le cas de  $Bt(G)$  on l'a déjà montré) où chaque point est un point d'accumulation n'est pas dénombrable. Ceci conclut la preuve.

□

Enfin on sait caractériser les groupes ayant un nombre infini de bouts. Ce résultat appelé **Théorème de Stallings** sera étudié partiellement dans la prochaine partie de ce rapport. On essaiera de comprendre un sens « facile » de ce théorème en introduisant la théorie de Bass-Serre sur les arbres.

## 4 Groupe agissant sur un arbre

Le but de cette partie va être de démontrer le sens «facile» du théorème de Stallings. Ce que l'on va vouloir monter c'est que les groupes qui sont des **produits libres amalgamés** (on en donnera une définition) sont des groupes avec une infinité de bouts. Pour faire cela, il est nécessaire de caractériser la façon dont ces groupes agissent sur certaines structures, ici des arbres. De manière plus fondamentale, nous allons changer de point de vue, au lieu de considérer ces groupes comme des structures purement algébriques, nous allons les traiter avant tout comme des objets géométriques définis par la manière dont ils agissent sur des espaces. Ainsi, même si on donnera des définitions algébriques de ces objets, il est nécessaire de les considérer avant tout à travers leurs actions sur des espaces.

### 4.1 Groupe Libre

Nous allons voir dans un premier temps le cas du groupe libre dont voici la définition.

**Définition 4.1.** Soit  $S$  un ensemble. Un groupe  $F$  contenant  $S$  est **librement engendré** par  $S$  si  $F$  à la propriété universelle suivante : pour tout groupe  $G$  et pour toute application  $f : S \rightarrow G$  il existe un unique morphisme  $\bar{f} : F \rightarrow G$  tel que  $\bar{f}(s) = f(s)$  pour tout  $s \in S$ . Autrement dit, le morphisme  $\bar{f}$  fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ F & & \end{array}$$

On dit qu'un groupe est un **groupe libre** si il est **librement engendré** par un ensemble.

**Exemple.**

- Le groupe  $\mathbb{Z}$  est libre car librement engendré par  $\{1\}$ .
- Le groupe trivial est librement engendré par l'ensemble vide.
- Les groupes ne sont pas tous libres. Le groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$  n'est pas libre. Pour montrer cela il suffit de remarquer qu'il n'existe qu'un seul morphisme de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ , le morphisme trivial. Ainsi, pour toute sous-partie de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , il suffit de considérer une application n'envoyant pas tous les éléments de cette sous partie sur 0 et on obtient une contradiction.

On peut ensuite montrer que pour un ensemble de générateurs  $S$  le groupe librement engendré par  $S$  est unique à isomorphisme près.

**Proposition 4.2.** Soit  $S$  un ensemble, il existe au plus un unique groupe (à isomorphisme canonique près) librement engendré par  $S$ .

*Démonstration.* Prenons  $F$  et  $F'$  deux groupes librement engendré par  $S$ . On note  $\pi_F$  et  $\pi_{F'}$  les inclusions respectives de  $S$  dans  $F$  et  $F'$ . On a donc les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_{F'}} & F' \\ \downarrow \pi_F & \nearrow \bar{\pi}_{F'} & \\ F & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_F} & F \\ \downarrow \pi_{F'} & \nearrow \bar{\pi}_F & \\ F' & & \end{array}$$

Montrons que l'on a  $\bar{\pi}_F \circ \bar{\pi}_{F'} = \text{Id}_F$  et  $\bar{\pi}_{F'} \circ \bar{\pi}_F = \text{Id}_{F'}$ . Prouvons que  $\bar{\pi}_F \circ \bar{\pi}_{F'} : F' \rightarrow F$  rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_F} & F \\ \downarrow \pi_F & \nearrow \bar{\pi}_F \circ \bar{\pi}_{F'} & \\ F & & \end{array}$$

En effet,  $\bar{\pi}_F \circ \bar{\pi}_{F'} \circ \pi_F = \bar{\pi}_F \circ \pi_{F'} = \pi_F$ . Mais  $\text{Id}_F$  est aussi un morphisme faisant commuter le diagramme, on en déduit que  $\bar{\pi}_F \circ \bar{\pi}_{F'} = \text{Id}_F$ . On montre de la même manière que  $\bar{\pi}_{F'} \circ \bar{\pi}_F = \text{Id}_{F'}$ . □

**Théorème 4.3.** Soit  $S$  un ensemble, il existe un unique groupe (à isomorphisme canonique près) librement engendré par  $S$ .

*Démonstration.* La proposition précédente nous donne l'unicité du groupe. Montrons son existence. Pour cela on considère dans un premier temps un ensemble  $S' = \{s' \mid s \in S\}$  disjoint de  $S$  et en bijection avec ce dernier. C'est-à-dire que l'application qui associe  $s'$  à  $s$  est une bijection. Cet ensemble va jouer le rôle des inverses de  $S$ . On note ensuite  $A = S \cup S'$  et on considère l'ensemble  $A^*$  des suites finies (c'est-à-dire des mots) d'éléments de  $A$  ce qui inclut la suite vide  $\epsilon$ .

On définit ensuite une loi de composition interne  $A^* \times A^* \rightarrow A^*$  par la concaténation des suites. Cette loi est associative et d'élément neutre le mot vide que l'on note  $\epsilon$ .

On considère maintenant la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A^* \quad \forall s \in S \quad xy &\sim xss'y \\ \forall x, y \in A^* \quad \forall s \in S \quad xy &\sim xs'sy \end{aligned}$$

On définit alors  $F(S) = A^* / \sim$  et on note pour tout  $x \in A^*$ ,  $\bar{x}$  la classe d'équivalence de  $x$  pour la relation  $\sim$ .

On vérifie facilement que la concaténation induit une composition  $\cdot : F(S) \times F(S) \rightarrow F(S)$  via :

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$$

Pour tout  $x, y \in A^*$ .

L'ensemble  $F(S)$  muni de l'opération  $\cdot$  est un groupe. De manière évidente la classe d'équivalence du mot vide  $\bar{\epsilon}$  est l'élément neutre et  $\cdot$  hérite de l'associativité de la concaténation. Pour montrer l'existence de l'inverse, on considère un élément  $x \in A^*$ . Par définition  $x = a_1 \dots a_n$  avec  $a_i \in A$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Maintenant, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si  $a_i \in S$  on pose  $b_i = a'_i$  autrement  $a_i \in S'$  donc  $a_i = s'_i$  avec  $s_i \in S$  et on pose  $b_i = s_i$ . On a alors  $\overline{b_i a_i} = \overline{a_i b_i} = \epsilon$  pour tout  $i$ . On définit ensuite  $y = b_n b_{n-1} \dots b_1$  et  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy} = \overline{a_1 \dots a_n b_n \dots b_1} = \epsilon$  et  $\bar{y} \cdot \bar{x} = \overline{yx} = \overline{b_1 \dots b_n a_n \dots a_1} = \epsilon$ . Ceci permet de montrer l'existence de l'inverse.

Montrons maintenant que  $F(S)$  est bien librement engendré par  $S$ . On pose  $i : S \rightarrow F(S)$  l'application qui envoie chaque lettre  $s \in S$  sur sa classe d'équivalence dans  $F(S)$ . Par construction, il est clair que  $i(S)$  engendre  $F(S)$  (car  $S$  engendre  $A^*$ ).

On montre ensuite que  $F(S)$  possède la propriété suivante : pour tout groupe  $G$  et pour toute application  $f : S \rightarrow G$  il existe un unique morphisme  $\bar{f} : F(S) \rightarrow G$  tel que  $\bar{f} \circ i = f$ . Soit  $f : S \rightarrow G$ , on construit l'application  $f^* : A^* \rightarrow G$  par récurrence pour tout  $s \in S$  et  $x \in A^*$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f^*(\epsilon) &= 1_G \\ f^*(sx) &= f(s) \cdot f^*(x) \\ f^*(s'x) &= (f(s))^{-1} \cdot f^*(x) \end{aligned}$$

Cette application est bien compatible avec  $\sim$  car compatible avec les relations engendrant  $\sim$  et de plus on a  $f^*(xy) = f^*(x) \cdot f^*(y)$  pour tous  $x, y \in A^*$ . Ainsi, l'application  $f^*$  induit une application :

$$\begin{aligned} \bar{f} : F(S) &\rightarrow G \\ \bar{x} &\mapsto f^*(x) \end{aligned}$$

Cette application est bien un morphisme de groupe par les remarques précédentes. De plus,  $\bar{f} \circ i = f$  et comme  $i(S)$  engendre  $F(S)$  ce morphisme est unique.

Il nous suffit maintenant de montrer que  $i$  est injective pour terminer la preuve (on identifiera  $S$  à son image  $i(S)$ ). Soient  $s_1, s_2 \in S$ , on considère une application  $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$  tel que  $f(s_1) = 1$  et  $f(s_2) = -1$ . Cette application induit un morphisme  $\bar{f} : F(S) \rightarrow G$  vérifiant :

$$\bar{f}(i(s_1)) = f(s_1) = 1 \neq -1 = f(s_2) = \bar{f}(i(s_2))$$

Ce qui implique que  $i(s_1) \neq i(s_2)$  et donc que  $i$  est injective. □

**Remarque.** Par la construction dans la preuve précédente (et par l'unicité) on remarque que si  $S$  engendre librement  $G$  alors  $S \cup S'$  engendre  $G$ .

On montre ensuite la proposition suivante :

**Proposition 4.4.** *Soit  $F$  un groupe libre :*

1. *Soit  $S \subset F$  un ensemble fini engendrant librement  $F$  et  $S'$  un ensemble de générateurs de  $F$ . Alors  $|S'| > |S|$ .*
2. *En particulier, tous les ensembles engendrant librement  $F$  sont de même cardinal.*

*Démonstration.* On suppose  $S$  et  $S'$  finis. On sait qu'il y a  $2^{|S|}$  applications entre  $S$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ce qui implique par la propriété universelle qu'il y a  $2^{|S|}$  morphismes entre  $F$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Soit  $F_{S'}$  le groupe libre engendré par  $S'$ , il y a donc  $2^{|S'|}$  morphismes entre  $F_{S'}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Montrons que chaque morphisme entre  $F$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  induit un unique morphisme entre  $F_{S'}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Comme  $S'$  engendre  $F$ , tout morphisme entre  $F$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est déterminé par sa donnée sur  $S'$ . Par propriété universelle, cette donnée implique un unique morphisme entre  $F_{S'}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi  $2^{|S'|} \geq 2^{|S|}$  et donc  $|S'| \geq |S|$ .

On obtient de la même façon  $|S| \geq |S'|$  si  $S'$  engendre librement  $F$ . □

Le résultat ci-dessus motive la définition suivante

**Définition 4.5.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec  $x_1, x_2, \dots, x_n$  distincts. On écrira  $F_n$  pour le groupe libre engendré par  $S$  et on appellera  $F_n$  le **groupe libre de rang  $n$** .

Enfin, les groupes libres «contiennent» en eux les groupes de type fini.

**Proposition 4.6.** *Un groupe est de type fini si et seulement si c'est le quotient d'un groupe libre de rang fini.*

*Démonstration.* D'une part, le quotient d'un groupe libre de rang fini est de type fini, l'image des générateurs engendrant le quotient.

D'autre part, si  $S \subset G$  engendre  $G$  et est fini. On peut considérer  $F_S$  le groupe libre sur  $S$  qui est lui aussi de type fini. Par la propriété universelle, on trouve un morphisme  $\pi : F_S \rightarrow G$  tel que  $\pi(s) = s$  pour tout  $s \in S$ . Ce morphisme est surjectif car  $S$  engendre  $G$ . Donc  $G$  est bien isomorphe à un quotient de  $F_S$ . □

On va maintenant vouloir caractériser les groupes libres en fonction de leurs actions sur des arbres, on va dans un premier temps introduire quelques notions fondamentales.

On rappelle qu'une action d'un groupe  $G$  sur un graphe  $\Gamma$  est un morphisme  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ .

**Définition 4.7.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma = (V, E)$ , on dit que cette action est :

- **Sans inversions** si il n'existe pas de  $g \in G$  et de  $e \in E$  tels que  $g \cdot e = \bar{e}$ .
- **Libre** si pour tout  $g \in G \setminus \{1_G\}$  et pour tout  $v \in V$  on a  $g \cdot v \neq v$ .

Si un groupe  $G$  agit sans inversions sur un graphe, on peut définir de manière intuitive la notion de **graphe quotient**.

**Définition 4.8.** Soit  $G$  un groupe agissant sans inversions sur un graphe  $\Gamma = (V, E)$ , on définit le **graphe quotient**  $G/\Gamma$  est le graphe ayant comme ensemble de sommets (respectivement comme ensemble d'arêtes) le quotient de  $V$  (respectivement  $E$ ) sous l'action de  $G$  (c'est-à-dire l'ensemble des orbites).

Comme  $G$  agit sur  $\Gamma$  par automorphismes de graphe, on vérifie facilement que l'on obtient bien un graphe comme quotient.

**Définition 4.9.** Un **arbre de représentants** d'un graphe  $\Gamma$  modulo un groupe  $G$  agissant sans inversions sur  $G$  est un sous-arbre  $T$  de  $\Gamma$  contenant un unique élément de chaque orbite de l'action de  $G$  sur  $\Gamma$ .

**Proposition 4.10.** *Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe connexe sur lequel agit sans inversions un groupe  $G$ . Pour tout sous-arbre  $T'$  de  $G/\Gamma$  il existe un sous-arbre  $T$  de  $\Gamma$  tel que son image dans le quotient est  $T'$ .*

*Démonstration.* Posons  $\Omega$  l'ensemble des sous-arbres de  $\Gamma$  se projetant injectivement dans  $T'$ . On remarque que cet ensemble est non-vide (le sous-arbre vide est dedans), ordonné (par l'inclusion) et que toute chaîne possède une borne supérieure (l'union des sous-arbres de la chaîne). On peut donc appliquer le lemme de Zorn et on obtient un arbre maximal  $T_0$ . On note  $T'_0$  l'image de  $T_0$  dans  $T'$  et on suppose que  $T'_0 \neq T'$ . Il existe donc une arête  $e'$  de  $T'$  qui n'est pas dans  $T'_0$ . Comme  $T'$  est connexe, on peut supposer que  $o(e')$  est un sommet de  $T'_0$ . Comme  $T'$  est un arbre, ceci implique que  $t(e')$  n'est pas dans  $T'_0$  (autrement on aurait un cycle dans  $T'$ ).

Soit  $e$  une arête dont l'image dans le quotient est  $e'$ . Quitte à remplacer  $e$  par  $g \cdot e$  on peut supposer que  $o(e)$  est dans  $T_0$ . On pose  $T_1$  le graphe que l'on obtient en ajoutant le sommet  $t(e)$  ainsi que les arêtes  $e$  et  $\bar{e}$  à  $T_0$ . On vérifie facilement que  $T_1$  est un arbre (il n'y a pas de cycles) et que  $T_1 \rightarrow T'$  est injective par construction de  $T_1$  et par injectivité de  $T_0 \rightarrow T'$ . Mais  $T_0$  est contenu dans  $T_1$  ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi  $T_0$  est bien le sous-arbre que l'on recherchait. □

Cette proposition montre que pour un graphe connexe, on a toujours l'existence d'un **arbre de représentants**.

On peut ensuite montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.11.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S_0$  un ensemble de générateurs fini de  $G$ . Si on peut trouver un ensemble  $S \subset S_0$  tel que  $S_0 = S \cup S^{-1}$  avec  $S \cap S^{-1} = \emptyset$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S_0)$  est un arbre.*
2. *Le groupe  $G$  est librement engendré par  $S$ .*

*Démonstration.* Dans la preuve, on utilisera la construction du groupe libre que l'on a fait lors de la preuve du théorème 4.3.

On montre dans un premier temps que 2 implique 1. Supposons qu'il existe un cycle dans  $\Gamma(G, S_0)$ , comme le graphe de Cayley est un graphe simplicial, les chemins et en particulier les cycles sont caractérisés par les sommets. On note donc ce cycle  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  de longueur  $n$  avec  $n \geq 3$ , on peut supposer les  $g_i$  distincts et pour  $j \in \{1, \dots, n-2\}$  :

$$g_{j+1}g_j^{-1} = s_{j+1} \in S \cup S^{-1}$$

De même  $g_0g_{n-1}^{-1} = s_n \in S \cup S^{-1}$ . Mais on obtiendrait alors :

$$s_n \dots s_1 = g_0g_{n-1}^{-1}g_{n-1}g_{n-2}^{-1} \dots g_1g_0^{-1} = 1_G = \epsilon$$

On a donc deux écritures pour le même élément, on remarque cependant que ces deux écritures ne sont pas équivalentes. En effet comme les  $g_i$  sont distincts on ne peut pas avoir  $s_j = s_{j+1}^{-1}$  pour  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . On a donc une contradiction, ces deux écritures ne sont pas équivalentes et ne peuvent donc pas définir le même élément. Il n'y a donc pas de cycles ce qui implique que  $\Gamma(G, S_0)$  est un arbre.

Montrons ensuite que 1 implique 2. Posons  $F(S)$  le groupe librement engendré par  $S$ . Par la propriété universelle on dispose donc d'un morphisme  $\varphi : F(S) \rightarrow G$  qui vaut l'identité sur  $S$ . Comme  $S$  engendre  $G$ , il est clair que  $\varphi$  est surjective. Supposons que  $\varphi$  ne soit pas injective. Il existe donc un élément  $x = s_1 \dots s_n \neq \epsilon$  de longueur minimale avec  $s_i \in S \cup S^{-1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\varphi(x) = 1_G$ . On considère les cas suivants :

- Comme  $\varphi$  est l'identité sur  $S$  alors  $n > 1$ .
- Si on suppose  $n = 2$  on aurait alors :

$$1_G = \varphi(s_1s_2) = \varphi(s_1)\varphi(s_2) = s_1s_2$$

Mais ceci est impossible car par hypothèse  $S \cap S^{-1} = \emptyset$  dans  $G$ .

- Si on suppose  $n \geq 3$ , on considère alors la suite  $g_0, \dots, g_{n-1}$  d'éléments de  $G$  défini par la relation de récurrence  $g_0 = 1_G$  et  $g_{i+1} = s_{i+1}g_i$  pour  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ . Comme  $x$  est de longueur minimale, les  $g_i$  sont distincts. De plus, le graphe de Cayley  $\Gamma(G, S)$  contient les arêtes  $\{g_i, g_{i+1}\}$  pour  $i \in \{1, \dots, n-2\}$  ainsi que l'arête  $\{g_{n-1}, g_0\}$ . On obtient donc un cycle dans  $\Gamma(G, S)$  ce qui contredit notre hypothèse. Ceci implique que  $\varphi$  est injective et on obtient donc un isomorphisme entre  $G$  et  $F(S)$ . □

Le résultat ci-dessus va nous permettre de montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.12.** *Un groupe est libre si et seulement si il agit librement et sans inversions sur un arbre non vide.*

*Démonstration.* On montre d'abord le sens facile de ce théorème. Soit  $F$  un groupe libre engendré librement par  $S$ , on vient de voir que son graphe de Cayley est un arbre. De plus nous avons vu dans la première partie de ce rapport que  $F$  agit sur son graphe de Cayley par translation à gauche. Cette action est évidemment libre, si  $g \cdot h = h$  alors  $g = 1_F$ . Cette action est aussi sans inversions, en effet on voit facilement que les éléments de  $S$  ne sont pas d'ordre 2 (on peut montrer qu'ils sont d'ordre infini via la propriété universelle et des applications entre  $S$  et  $\mathbb{Z}$  envoyant les éléments de  $S$  sur des éléments de  $\mathbb{Z}$  non nuls). Puis comme aucun des éléments de  $S$  n'est d'ordre 2 et que  $\Gamma(F, S \cup S^{-1})$  est un graphe simplicial, avoir  $g \cdot y = \bar{y}$  avec  $g \in F$  et  $y$  une arête revient à avoir pour un certain  $h \in F$  et  $s \in S$  :

$$\{h, sh\} = \{g \cdot h, g \cdot sh\}$$

Ce qui signifie soit que  $g = 1_F$  soit que  $g = s$  et que  $s$  est d'ordre 2 mais c'est impossible.

On montre ensuite l'autre sens. Soit  $G$  un groupe agissant librement et sans inversions sur un arbre non vide  $T$ . Par la proposition 4.10, il existe un arbre de représentants  $T'$  de l'action de  $G$  sur  $T$ . Une arête de  $T$  est dite **essentielle** si elle n'est pas dans  $T'$  mais qu'une de ses extrémités est dans  $T'$  (comme  $T$  est un arbre, la deuxième n'est pas dans  $T'$ ).

Nous allons vouloir construire un ensemble qui va librement engendrer  $G$ . Soit  $e$  une arête essentielle de  $T$  tel que  $e = \{u, v\}$  avec  $u$  dans  $T'$  et pas  $v$ . Par définition de  $T'$ , il existe un élément  $g_e \in G$  tel que  $g_e^{-1} \cdot v$  est un sommet de  $T'$ . De manière équivalente,  $v$  est un sommet de  $g_e \cdot T'$ . L'élément  $g_e$  est unique car l'orbite  $G \cdot v$  n'a qu'un seul élément dans  $T'$  et que l'action est libre. On pose alors  $\tilde{S} = \{g_e \in G \mid e \text{ est une arête essentielle de } T\}$ . Cet ensemble a les propriétés suivantes :

1. Par définition, l'élément neutre n'appartient pas à cet ensemble.
2. L'ensemble  $\tilde{S}$  ne contient pas d'éléments d'ordre 2 car  $G$  agit sur  $T$  librement et sans inversions.
3. Si  $e$  et  $e'$  sont deux arêtes essentielles et que  $g_e = g_{e'}$  alors  $e = e'$ . En effet  $T$  est un arbre donc il ne peut pas y avoir deux arêtes  $e$  et  $e'$  différentes reliant la même composante connexe  $g_e \cdot T' = g_{e'} \cdot T'$ .
4. Si  $g_e \in \tilde{S}$  pour  $e$  une arête essentielle, alors  $(g_e)^{-1} = g_{g^{-1} \cdot e}$  est aussi dans  $\tilde{S}$ . En effet, si  $e = \{u, v\}$  avec  $u$  dans  $T'$  et  $v \notin T'$ . Comme  $T'$  ne contient qu'un seul élément de l'orbite de  $u$  par définition, on ne peut pas avoir  $g_e^{-1} \cdot u$  dans  $T'$ . Ceci implique que  $g^{-1} \cdot e$  est une arête essentielle.

En particulier, on en déduit l'existence de  $S \subset \tilde{S}$  tel que  $S \cap S^{-1} = \emptyset$  et  $S \cup S^{-1} = \tilde{S}$ .

Montrons que l'ensemble  $\tilde{S}$  engendre  $G$ . Soit  $g \in G$ , prenons un sommet  $v$  de  $T'$ . Comme  $T$  est connexe, on peut trouver un chemin dans  $T$  joignant  $v$  et  $g \cdot v$ . De plus, ce chemin passe par plusieurs copies successives  $g_0 \cdot T', \dots, g_n \cdot T'$  de  $T'$  avec  $g_0 = 1_G$ ,  $g_i \neq g_{i+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $g_n = g$ .

Soit  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , comme  $T'$  est un arbre de représentants et que  $g_i \neq g_{i+1}$ , les copies  $g_i \cdot T'$  et  $g_{i+1} \cdot T'$  sont reliées par une arête  $e_i$ . Puis par définition, les arêtes  $g_i^{-1} \cdot e_i$  sont des arêtes essentielles, et l'élément correspondant  $s_i = g_i^{-1} g_{i+1}$  est dans  $\tilde{S}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} g &= g_n = g_0^{-1} g_n \\ &= g_0^{-1} g_1 g_1^{-1} g_2 \dots g_{n-1}^{-1} g_n \\ &= s_0 \dots s_n \end{aligned}$$

Ceci implique que  $\tilde{S}$  est un ensemble générateur de  $G$ .

Montrons enfin que  $S$  engendre librement  $G$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\Gamma(G, \tilde{S})$  est un arbre. Supposons que  $\Gamma(G, \tilde{S})$  possède un cycle  $g_0, \dots, g_{n-1}$  avec  $n$  un entier plus grand que 3. Par définition, les éléments  $s_{i+1} = g_i^{-1} g_{i+1}$  ainsi que  $s_n = g_{n-1}^{-1} g_0$  sont dans  $\tilde{S}$  pour  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on pose  $e_i$  l'arête essentielle joignant  $T'$  et  $s_i \cdot T'$ .

Comme les translatés de  $T'$  sont connexes, on peut joindre les extrémités de  $g_i \cdot e_i$  et  $g_i \cdot s_i \cdot e_i = g_{i+1} \cdot e_i$  qui sont dans  $g_i \cdot T'$  par un chemin dans  $g_i \cdot T'$ . Mais comme  $g_0, \dots, g_{n-1}$  est un cycle dans  $\Gamma(G, \tilde{S})$  alors la concaténation de ces chemins nous donne un cycle dans  $T$  ce qui est impossible. Finalement  $\Gamma(G, \tilde{S})$  est un arbre et par la proposition 4.11, l'ensemble  $S$  engendre librement  $G$ . □

Ce résultat nous permet de prouver des théorèmes qui nous seraient difficilement accessibles en utilisant seulement la définition algébrique. On a par exemple le **théorème de Nielsen-Schreier** :

**Théorème 4.13. (Nielsen-Schreier)** *Les sous-groupes des groupes libres sont libres.*



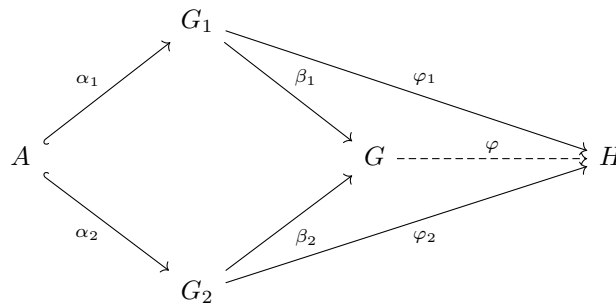
*Démonstration.* Soit  $F$  un groupe libre et  $H$  un sous-groupe de  $F$ . Comme  $F$  est libre par le théorème précédent, il agit librement et sans inversions sur un arbre non vide  $T$ . Comme  $H$  est un sous-groupe de  $F$ , il agit lui aussi librement et sans inversions sur  $T$ , il est donc lui aussi libre. □

## 4.2 Produit Libre Amalgamé

Nous allons maintenant aborder une autre structure algébrique, le **produit libre amalgamé**. Encore une fois, on commencera par en donner une définition algébrique puis on déterminera une caractérisation géométrique de cet objet. Cette caractérisation géométrique est celle qu'il faudra retenir et utiliser dans la suite.

**Définition 4.14.** Soient  $G_1, G_2$  et  $A$  des groupes. Soient  $\alpha_1 : A \rightarrow G_1$  et  $\alpha_2 : A \rightarrow G_2$  deux morphismes injectifs. On dit qu'un groupe  $G$  muni de morphismes  $\beta_1 : G_1 \rightarrow G$  et  $\beta_2 : G_2 \rightarrow G$  vérifiant  $\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2$  est un **produit amalgamé de  $G_1$  et  $G_2$  au dessus de  $A$**  si la propriété universelle suivante est vérifiée :

Pour tout groupe  $H$  et morphismes  $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$  et  $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$  vérifiant  $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$  il existe un unique morphisme  $\varphi : G \rightarrow H$  tel que  $\varphi \circ \beta_1 = \varphi_1$  et  $\varphi \circ \beta_2 = \varphi_2$ . On notera cette construction  $G_1 *_A G_2$ . Voici le diagramme commutatif associé à cette construction :



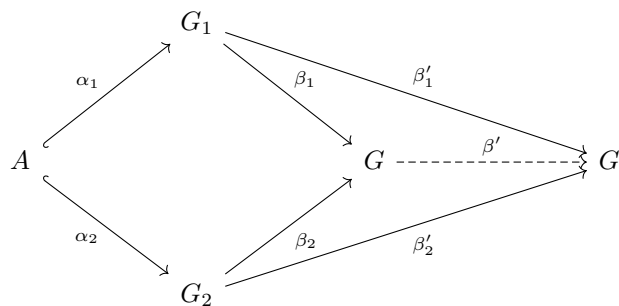
Dans le cas où  $A$  correspond au groupe trivial, on écrit  $G_1 * G_2$  pour  $G_1 *_A G_2$  et on dit que  $G_1 * G_2$  est le **produit libre** de  $G_1$  et  $G_2$ .

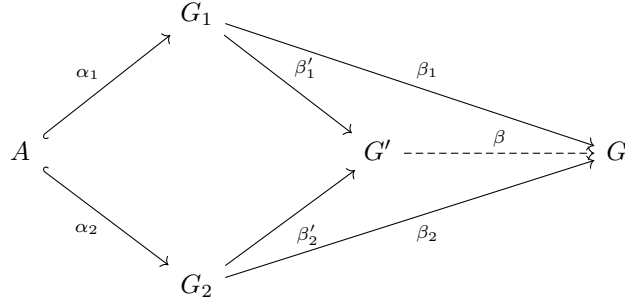
Moralement, il faut voir un produit libre amalgamé comme «le groupe le plus général» contenant  $G_1$  et  $G_2$  et identifiant les images de  $A$  dans ces groupes. On a en quelque sorte «collé» les images de  $A$  dans  $G_1$  en  $G_2$ .

Montrons ensuite l'existence et l'unicité de cet objet :

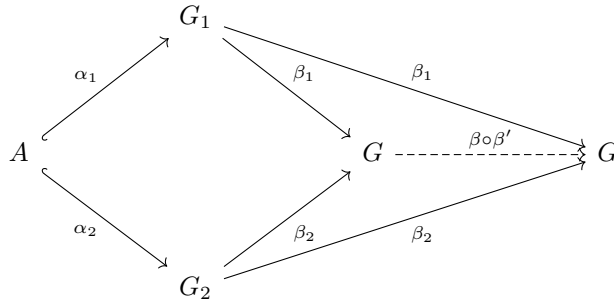
**Théorème 4.15.** *Les produits libre amalgamés existent et sont uniques à isomorphisme canonique près.*

*Démonstration.* Commençons par l'**unicité**. Elle va encore une fois venir de la propriété universelle. Supposons qu'il existe deux groupes  $G$  et  $G'$  vérifiant la propriété universelle. On a en particulier les diagrammes suivant :





On a donc que  $\beta \circ \beta'$  fait commuter le diagramme suivant :



En effet,  $\beta \circ \beta' \circ \beta_1 = \beta \circ \beta'_1 = \beta_1$  et de même pour l'autre côté. Mais  $\text{Id}_G$  fait aussi commuter ce diagramme, donc par unicité on a que  $\beta \circ \beta' = \text{Id}_G$ . On montre de même que  $\beta' \circ \beta = \text{Id}_{G'}$  ce qui implique que les  $G$  et  $G'$  sont canoniquement isomorphes.

Vérifions ensuite l'existence d'un tel groupe. La construction d'un tel groupe est similaire à celle faite dans la preuve du théorème 4.3, on se permettra donc de passer sur certains détails. On commence dans un premier temps à montrer l'existence du **produit libre** de  $G_1$  et  $G_2$ . Posons  $A = G_1 \cup G_2$  et on considère l'ensemble  $A^*$  des suites finies (c'est-à-dire des mots) d'éléments de  $A$  ce qui inclut la suite vide  $\epsilon$ . On définit maintenant la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A^* \quad \forall g_1, g'_1 \in G_1 \quad xg_1g'_1y &\sim x(g_1g'_1)y \\ \forall x, y \in A^* \quad \forall g_2, g'_2 \in G_2 \quad xg_2g'_2y &\sim x(g_2g'_2)y \\ \forall x, y \in A^* \quad x1_{G_1}y &\sim xy \\ \forall x, y \in A^* \quad x1_{G_2}y &\sim xy \end{aligned}$$

Par la suite on notera  $\bar{x}$  la classe d'équivalence de  $x \in A^*$  pour la relation d'équivalence  $\sim$ . On considère maintenant  $G = A^*/\sim$  et comme dans la preuve du théorème 4.3, la loi de composition induite par la concaténation sur  $A^*$  est une loi de groupe. On remarque aussi que l'on possède des morphismes naturels (injectifs)  $\beta_1 : G_1 \rightarrow G$  et  $\beta_2 : G_2 \rightarrow G$  qui associent à  $g_i \in G_i$  l'élément  $\bar{g}_i \in G$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On vérifie aussi facilement que par construction  $\beta_1(G_1) \cup \beta_2(G_2)$  est une partie génératrice de  $G$ .

On montre maintenant que  $G = G_1 * G_2$  c'est-à-dire que si  $H$  est un groupe et qu'on a deux morphismes  $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$  et  $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$  alors il existe un unique morphisme  $\varphi : G \rightarrow H$  vérifiant  $\varphi \circ \beta_1 = \varphi_1$  et  $\varphi \circ \beta_2 = \varphi_2$ . Pour cela, on construit d'abord l'application  $\varphi^* : A^* \rightarrow H$  par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi^*(\epsilon) &= 1_H \\ \forall x \in A^* \quad \forall g_1 \in G_1 \quad \varphi^*(g_1x) &= \varphi_1(g_1) \cdot \varphi^*(x) \\ \forall x \in A^* \quad \forall g_2 \in G_2 \quad \varphi^*(g_2x) &= \varphi_2(g_2) \cdot \varphi^*(x) \end{aligned}$$

On vérifie facilement que cette application est compatible avec les relations engendrant  $\sim$  et avec la concaténation. Elle induit donc un morphisme  $\varphi : G \rightarrow H$  et on a bien  $\varphi \circ \beta_1 = \varphi_1$  et  $\varphi \circ \beta_2 = \varphi_2$ . Comme  $\beta_1(G_1) \cup \beta_2(G_2)$  est une partie génératrice de  $G$ , le morphisme  $\varphi$  est unique. Ceci achève la construction du produit libre.

On va maintenant construire à partir du produit libre le produit libre amalgamé. On a donc en plus  $A$  un groupe ainsi que des morphismes injectifs  $\alpha_1 : A \rightarrow G_1$  et  $\alpha_2 : A \rightarrow G_2$ . Pour cela, on considère  $N$  le sous-groupe normal de  $G = G_1 * G_2$  engendré par les éléments de la forme  $\beta_1 \circ \alpha_1(a) \cdot (\beta_2 \circ \alpha_2(a))^{-1}$  pour  $a \in A$ . Enfin on note  $G_A = G/N$  et on veut montrer que  $G_A = G_1 *_A G_2$ . On pose  $\pi : G \rightarrow G_A$  le morphisme de quotient et on note  $\gamma_1 = \pi \circ \beta_1$  et  $\gamma_2 = \pi \circ \beta_2$ . On remarque que pour  $a \in A$  on a bien  $\gamma_1 \circ \alpha_1(a) = \gamma_2 \circ \alpha_2(a)$  car par définition  $\beta_1 \circ \alpha_1(a) \cdot (\beta_2 \circ \alpha_2(a))^{-1} \in N$ .

On veut ensuite montrer que  $G_A$  vérifie la propriété universelle. On se donne deux morphismes  $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$  et  $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$  tels que  $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$ . Par la propriété universelle du produit libre, on obtient alors un unique morphisme  $\varphi : G \rightarrow H$  vérifiant  $\varphi \circ \beta_1 = \varphi_1$  et  $\varphi \circ \beta_2 = \varphi_2$ . Enfin, comme pour tout  $a \in A$  on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\beta_1 \circ \alpha_1(a) \cdot (\beta_2 \circ \alpha_2(a))^{-1}) &= \varphi(\beta_1 \circ \alpha_1(a)) \cdot (\varphi(\beta_2 \circ \alpha_2(a)))^{-1} \\ &= \varphi_1(\alpha_1(a)) \cdot (\varphi_2(\alpha_2(a)))^{-1} \\ &= 1_H \end{aligned}$$

Alors La propriété universelle du quotient nous donne un unique morphisme  $\bar{\varphi} : G_A \rightarrow H$  tel que  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ . Enfin, on vérifie facilement à partir des propriétés de  $\varphi$  que ce morphisme est bien celui recherché et il est unique. Ceci finit de montrer que  $G_A = G_1 *_A G_2$ . □

**Remarque.** On peut aussi définir des produits libres et amalgamés de plusieurs groupes (mais toujours au dessus du même groupe) en itérant simplement la construction de la preuve.

Dans la suite, on identifiera le groupe  $A$  à ses images dans  $G_1$  et  $G_2$ . Avant de passer à la caractérisation géométrique des produits amalgamés, nous allons devoir montrer un théorème de structure sur les produits amalgamés. Pour cela on doit d'abord définir la notion de mots réduits dans un produit amalgamé.

On considère d'abord les ensembles  $S_1$  et  $S_2$  de représentants pour les classes à droite modulo  $A$  dans  $G_1$  et  $G_2$  respectivement. On suppose aussi que  $1_{G_1} \in S_1$  et  $1_{G_2} \in S_2$ . L'application  $(a, s) \mapsto sa$  est une bijection de  $A \times S_i$  dans  $G_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

**Définition 4.16.** Soit  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  une suite d'éléments de  $\{1, 2\}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant la propriété suivante :

$$i_k \neq i_{k+1} \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-1\} \tag{T}$$

Un **mot réduit** de type  $\mathbf{i}$  dans  $G_1 *_A G_2$  est une famille  $m = (a; s_1, s_2, \dots, s_n)$  avec  $a \in A$  et  $s_1 \in S_{i_1}, \dots, s_n \in S_{i_n}$  et où  $s_j \neq 1_{G_1}$  et  $s_j \neq 1_{G_2}$ .

On reprend les notations de la définition (en identifiant  $A$  à ses images dans  $G_1$  et  $G_2$ ). On peut maintenant montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.17.** Pour tout  $g \in G_1 *_A G_2$  il existe une unique suite  $\mathbf{i}$  vérifiant (T) et un unique mot réduit de type  $\mathbf{i}$ ,  $m = (a, s_1, \dots, s_n)$  tel que :

$$g = \beta_1(a)\beta_{j_1}(s_1) \dots \beta_{j_n}(s_n)$$

*Démonstration.* Soit  $X_i$  l'ensemble des mots réduits de type  $\mathbf{i}$  et  $X$  la somme disjointe des  $X_i$ . On va faire agir  $G_1 *_A G_2$  sur  $X$ , de part la propriété universelle il suffit de faire agir  $G_1$  et  $G_2$  sur  $X$  et de vérifier que l'action induite sur  $A$  ne dépend pas de  $G_1$  et  $G_2$ .

Prenons ensuite  $i \in \{1, 2\}$  et posons  $Y_i$  l'ensemble des mots réduits de la forme  $(1_A; s_1, \dots, s_n)$  avec  $i_1 \neq i$ . Les ensembles  $A \times Y_i$  et  $A \times (S_i - \{1_{G_i}\}) \times Y_i$  sont envoyés sur  $X$  via les applications :

$$\begin{aligned} (a, (1_A; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s_1, \dots, s_n) \\ ((a, s), (1_A; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s, s_1, \dots, s_n) \end{aligned}$$

Il est clair que cela nous fourni une bijection entre  $A \times Y_i \cup A \times (S_i - \{1_{G_i}\}) \times Y_i$  et  $X$ . Mais  $A \cup A \times (S_i - \{1_{G_i}\})$  peut aussi être identifié à  $G_i$ , ceci nous donne donc une bijection :

$$\theta_i : G_i \times Y_i \rightarrow X$$

Et on fait maintenant agir  $G_i$  sur  $G_i \times Y_i$  de manière naturelle, pour  $g, g' \in G_i$  et  $y \in Y_i$  :

$$g' \cdot (g, y) = (g'g, y)$$

Cette action induit donc une action sur  $X$  via la bijection  $\theta_i$  et sa restriction sur  $A$  est : pour  $a, a' \in A$  :

$$a' \cdot (a; s_1, \dots, s_n) = (a'a; s_1, \dots, s_n)$$

De plus, cette action ne dépend pas de  $i$ .

On a donc défini une action de  $G_1 *_A G_2$  sur  $X$ . De plus, si  $m = (a; s_1, \dots, s_n)$  est un mot réduit et si  $g$  est son image dans  $G_1 *_A G_2$  via la formule donnée dans le théorème :

$$g = \beta_1(a)\beta_{j_1}(s_1) \dots \beta_{j_n}(s_n)$$

Alors, le transformé par  $g$  du mot identité  $e = (1_A;)$  est  $m$  lui même (cela se vérifie facilement par récurrence sur  $n$ ).

Si on note l'application  $g \mapsto g \cdot e$  par  $\alpha : G_1 *_A G_2 \rightarrow X$  et l'application qui a un mot réduit associe la formule du théorème par  $\beta : X \rightarrow G_1 *_A G_2$ . On a alors  $\alpha \circ \beta = \text{Id}_X$  ce qui implique l'injectivité de  $\beta$  et donc l'unicité de la décomposition. On peut alors identifier  $X$  à son image  $\beta(X)$  et il reste à voir que  $X = G_1 *_A G_2$ . Prenons  $g \in G_1 *_A G_2$ , on sait que  $g = g_1 g_2 \dots g_n$  avec  $g_i \in G_{j_i} \setminus \{1_{G_{j_i}}\}$  et où  $(j_1, \dots, j_n)$  est une famille vérifiant (T), ceci vient de la construction de  $G_1 *_A G_2$ . On peut alors écrire :

$$\begin{array}{ll} g_n = a_n s_n & (a_n \in A, s_n \in S_{j_n}) \\ g_{n-1} a_n = a_{n-1} s_{n-1} & (a_{n-1} \in A, s_{n-1} \in S_{j_{n-1}}) \\ \vdots & \\ g_1 a_2 = a_1 s_1 & (a_1 \in A, s_1 \in S_{j_1}) \end{array}$$

Ceci implique que  $g_1 = a_1 r_1 a_2^{-1}$ ,  $g_2 = a_2 r_2 a_3^{-1}$ , ...,  $g_n = a_n r_n$  et donc  $(a_1; s_1, \dots, s_n)$  est un mot réduit représentant  $g$ . On a donc bien  $X = G_1 *_A G_2$  ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque.** Ce théorème permet aussi de montrer que les applications  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont injectives ce qui n'est pas forcément évident à priori.

On va maintenant pouvoir aborder l'aspect géométrique des ces produits libres amalgamés.

**Définition 4.18.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un graphe  $\Gamma$ . Un **domaine fondamental** de  $\Gamma$  modulo  $G$  est un sous-graphe  $T$  de  $\Gamma$  tel que  $T \rightarrow G/\Gamma$  soit un isomorphisme.

**Remarque.** Si le graphe  $G/\Gamma$  est un arbre, la proposition 4.10 nous assure de l'existence d'un domaine fondamental. On peut aussi montrer que si  $\Gamma$  est un arbre, un domaine fondamental existe si et seulement si  $G/\Gamma$  est un arbre. En effet, comme  $\Gamma$  est connexe et non vide, c'est aussi le cas pour  $G/\Gamma$ . Donc si un domaine fondamental  $T$  existe, c'est un sous-graphe connexe non vide d'un arbre, c'est donc un arbre.

**Théorème 4.19.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un graphe  $\Gamma$  non vide. Supposons qu'un domaine fondamental  $T$  de  $\Gamma$  modulo  $G$  soit un segment c'est à dire deux sommets  $P$  et  $Q$  liés par une arête  $e$ . On pose  $G_P, G_Q$  et  $G_e = G_{\bar{e}}$  les stabilisateurs respectifs des sommets  $P$  et  $Q$  et de l'arête  $e$ . On remarque déjà que  $G_e = G_P \cap G_Q$  et que c'est donc un sous-groupe de  $G_P$  et  $G_Q$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Le graphe  $\Gamma$  est un arbre.
2. Le morphisme  $G_P *__{G_e} G_Q \rightarrow G$  induit par les inclusions  $G_P \rightarrow G$  et  $G_Q \rightarrow G$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* La preuve se déduit des deux lemmes suivants :

**Lemme 4.20.** Pour que  $\Gamma$  soit connexe, il faut et il suffit que  $G$  soit engendré par  $G_P \cup G_Q$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma'$  la composante connexe de  $\Gamma$  contenant  $T$ . Soit  $G'$  l'ensemble des éléments de  $G$  tels que  $g \cdot \Gamma' = \Gamma'$  et  $G''$  le sous-groupe de  $G$  généré par  $G_P \cup G_Q$ . Si  $h \in G_P \cup G_Q$  alors  $T$  et  $h \cdot T$  ont au moins un sommet en commun. On a donc  $h \cdot T \subset \Gamma'$  ce qui implique  $h \cdot \Gamma' = \Gamma'$  c'est-à-dire que  $h \in G'$  ce qui prouve que  $G'' \subset G'$ . D'autre part,  $G'' \cdot T$  et  $(G - G'') \cdot T$  sont des sous-graphes (disjoints) dont la réunion est  $\Gamma$ . On en déduit que  $G'' \cdot T$  contient  $\Gamma'$  et donc que  $G' \subset G''$  d'où  $G' = G''$ . Ainsi, le graphe  $\Gamma$  est connexe si et seulement  $\Gamma = \Gamma'$  c'est-à-dire  $G = G' = G''$ .  $\square$

**Lemme 4.21.** *Pour que  $\Gamma$  ne contienne pas de cycles, il faut et il suffit que  $G_P *_{G_e} G_Q \rightarrow G$  soit injectif.*

*Démonstration.* Dire que  $\Gamma$  contient un cycle revient à dire qu'il existe dans  $\Gamma$  un chemin  $w_0, \dots, w_n$  (les  $w_i$  sont des arêtes) sans aller-retour tel que  $o(w_0) = t(w_n)$  avec  $n \geq 1$ . Comme  $T$  est un domaine fondamental, on peut écrire  $w_i = h_i \cdot e_i$  avec  $h_i \in G$  et  $e_i = e$  ou  $\bar{e}$ . En passant dans  $G/\Gamma$ , on voit de plus que  $\bar{e}_i = e_{i-1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  car  $o(w_i) = t(w_{i-1})$ . Soit  $P_i = o(e_i) = t(e_{i-1})$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On a  $h_i = h_{i-1}g_i$  avec  $g_i \in G_{P_i}$  car :

$$h_i \cdot P_i = h_i \cdot o(e_i) = o(h_i \cdot e_i) = t(h_{i-1} \cdot e_{i-1}) = h_{i-1} \cdot P_i$$

Et comme  $g_i \notin G_e$  car il n'y a pas d'aller-retour on a donc :

$$\overline{h_i \cdot e_i} \neq h_{i-1}y_{i-1}$$

Le fait que  $o(w_0) = t(w_n)$  nous donne que :

$$h_0 \cdot P_0 = h_n \cdot P_0 = h_{n-1}g_n \cdot P_0 = \dots = h_0g_1 \dots g_n \cdot P_0$$

Et donc que  $g_1 \dots g_n \in G_{P_0}$ . On pose  $g_0 = (g_1 \dots g_n)^{-1}$  et on a  $g_0 \in G_{P_0}$ .

On en conclut que  $\Gamma$  contient un cycle si et seulement si on peut trouver une suite  $(P_0, \dots, P_n)$  de sommets de  $T$  (donc de  $\{P, Q\}$ ) tels que  $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi qu'une suite d'éléments  $g_i \in G_{P_i} - G_e$  tel que  $g_0g_1 \dots g_n = 1_G$ . Or, à partir de cette suite d'éléments, on peut construire un mot réduit de  $G_P *_{G_e} G_Q$  de la même manière que pour la preuve de l'existence dans le théorème de structure. De plus cet élément est nécessairement distinct de  $1_{G_P *_{G_e} G_Q}$ . Ainsi, trouver un cycle dans  $\Gamma$  équivaut à trouver un élément de  $G_P *_{G_e} G_Q$  différent de l'élément neutre qui soit envoyer sur  $1_G$ . Autrement dit cela est équivalent à ce que  $G_P *_{G_e} G_Q \rightarrow G$  ne soit pas injective. □

Avec le premier lemme, on détermine que  $\Gamma$  est connexe non-vide si et seulement si  $G_P *_{G_e} G_Q \rightarrow G$  est surjective. Avec le deuxième,  $\Gamma$  est sans cycle si et seulement si  $G_P *_{G_e} G_Q \rightarrow G$  est injective. En combinant les deux,  $\Gamma$  est un arbre si et seulement si  $G_P *_{G_e} G_Q \rightarrow G$  est un isomorphisme. □

Ce théorème montre donc une condition géométrique pour qu'un groupe soit un produit libre amalgamé, on verra dans la prochaine sous-partie qu'un produit libre amalgamé valide forcément cette condition. En montrant cela, on montrera dans le même temps un cas particulier du théorème de Stallings.

### 4.3 Cas particulier du théorème de Stallings

Nous allons enfin nous intéresser au théorème de Stallings qui est le suivant :

**Théorème 4.22. (Stallings)** *Soit  $G$  un groupe de type fini. Le groupe  $G$  a un nombre infini de bouts si et seulement si il peut être exprimé comme un produit libre amalgamé  $A *_C B$  ou une extension HNN  $A *_C$  avec  $C$  fini,  $|A : C| \geq 3$  et  $|B : C| \geq 2$ .*

Comme dit précédemment, nous allons seulement montrer un cas particulier du sens simple de ce théorème. Nous allons prouver qu'un produit amalgamé  $A *_C B$  avec les conditions du théorème a une infinité de bouts. Nous n'avons pas introduit les extensions HNN plus par manque de temps et de place que par difficulté on ne va donc pas traiter ce cas.

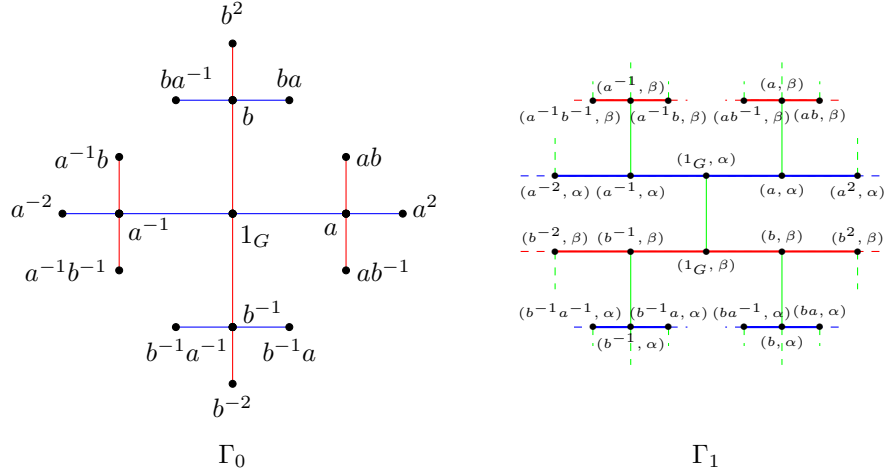
L'autre sens du théorème (le seulement si) est autrement plus difficile à montrer et la démonstration ne figure pas dans ce rapport.

Soient  $A$  et  $B$  des groupes de type fini et  $C$  un sous-groupe fini de  $A$  et de  $B$ . On suppose  $|A : C| \geq 3$  et  $|B : C| \geq 2$ . Les groupes  $A$  et  $B$  sont de type fini, on note  $S_A$  et  $S_B$  leurs générateurs respectifs et on peut supposer que  $C \subset S_A$  et  $C \subset S_B$ . On note  $G = A *_C B$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma(G, S_A \cup S_B)$  le graphe de Cayley de  $G$  relativement à  $S_A \cup S_B$  et on note  $V_0$  l'ensemble de ses sommets et  $E_0$  l'ensemble de ses arêtes. L'idée de la preuve va être de construire à partir de  $\Gamma_0$  un autre graphe qui lui est quasi-isométrique. Puis, on remarquera que ce dernier graphe possède un arbre sous-jacent en faisant agir  $G$  dessus. On montrera ensuite que cet arbre sous-jacent a une infinité de bouts et que ces bouts s'injectent dans le graphe quasi-isométrique à  $\Gamma_0$  ce qui terminera la preuve.

On construit le graphe  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  de la façon suivante : l'ensemble de ses sommets est  $V_1 = V_0 \times \{\alpha, \beta\}$ . Pour ses arêtes, on considère que deux de ses sommets sont adjacents si on est dans une de ces trois situations :

1. Si  $v, w \in V_0$  avec  $w^{-1}v \in S_A$  alors  $(v, \alpha)$  et  $(w, \alpha)$  sont adjacents et on dit que l'arête est de **type**  $\alpha$ .
2. Si  $v, w \in V_0$  avec  $w^{-1}v \in S_B$  alors  $(v, \beta)$  et  $(w, \beta)$  sont adjacents et on dit que l'arête est de **type**  $\beta$ .
3. Si  $v \in V_0$  alors  $(v, \alpha)$  et  $(v, \beta)$  sont adjacents et on dit que l'arête est de **type**  $\epsilon$ .

Par exemple, si on prend le groupe libre de rang 2, on peut vérifier facilement que c'est le produit libre (qui est un cas particulier de produit libre amalgamé) du groupe libre de rang 1 (c'est à dire  $\mathbb{Z}$ ) avec lui même. On peut alors représenter le passage de  $\Gamma_0$  à  $\Gamma_1$  de la manière suivante.



La première étape consiste à montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.23.** *Les graphes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_0$  sont quasi-isométriques.*

*Démonstration.* On pose l'application naturelle :

$$\begin{aligned}
 f: \quad V_1 &\rightarrow V_0 \\
 (v, \alpha) &\mapsto v \\
 (v, \beta) &\mapsto v
 \end{aligned}$$

L'application est surjective et donc en particulier quasi-surjective. On doit ensuite trouver  $\lambda \geq 1$  et  $\epsilon \geq 0$  tels que :

$$\frac{1}{\lambda} d_{\Gamma_1}(v, v') - \epsilon \leq d_{\Gamma_0}(f(v), f(v')) \leq \lambda d_{\Gamma_1}(v, v') + \epsilon$$

Pour cela, on rappelle que les graphes sont des espaces géodésiques. Ainsi, prenons un chemin géodésique entre  $v$  et  $v'$ , l'image de cette géodésique par  $f$  est toujours un chemin. En effet, si deux sommets sont joints par une arête de type  $\alpha$  ou  $\beta$  dans  $\Gamma_1$ , alors par définition de  $\Gamma_0 = \Gamma(G, S_A \cup S_B)$  ces deux sommets sont aussi adjacents dans  $\Gamma_0$ . Si deux sommets sont joints par une arête de type  $\epsilon$  alors par définition, leur image dans  $\Gamma_0$  est la même. Ainsi, non seulement l'image d'une géodésique est un chemin, mais c'est un chemin plus court que la géodésique. En particulier on a  $d_{\Gamma_0}(f(v), f(v')) \leq d_{\Gamma_1}(v, v')$ .

Ensuite, si on reprend une géodésique entre  $v$  et  $v'$ . Cette géodésique ne fait pas d'aller-retour donc en particulier elle ne peut pas emprunter deux fois de suite une arête de type  $\epsilon$ . En effet, il est évident que tout sommet de  $\Gamma_1$  est un extrémité d'exactlyement une arête de type  $\epsilon$ . Ceci implique que pour une géodésique de longueur  $n$ , il y a au plus  $\frac{n+1}{2}$  arêtes qui sont de type  $\epsilon$ . Ces arêtes sont les seules à être « effacées » par la fonction  $f$ . On en déduit que :

$$d_{\Gamma_1}(v, v') \leq 2d_{\Gamma_0}(f(v), f(v')) + 1$$

Ce qui implique bien que  $f$  est une quasi-isométrie. □

**Remarque.** La proposition précédente implique en particulier que  $G$  a le même nombre de bouts que  $\Gamma_1$ .

On va maintenant exhiber un arbre sous-jacent à  $\Gamma_1$ . Pour cela on doit définir les notions suivantes.

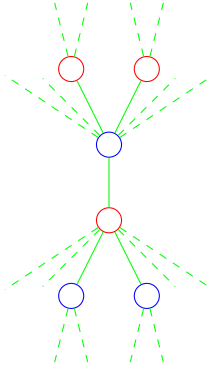
**Définition 4.24.** Soit  $\Gamma_1$  le graphe défini précédemment.

- Un  $\alpha$ -résidu de  $\Gamma_1$  est un sous-graphe connexe maximal dont les arêtes sont de type  $\alpha$ .
- Un  $\beta$ -résidu de  $\Gamma_1$  est un sous-graphe connexe maximal dont les arêtes sont de type  $\beta$ .

- Un  $\epsilon$ -résidu de  $\Gamma_1$  est l'union de tous les chemins d'une origine donnée et utilisant des arêtes de type  $\epsilon$  ou de type  $c$  (c'est-à-dire que si  $g_1$  et  $g_2$  sont adjacents on a  $g_1^{-1}g_2 \in C$ ).

Dans notre exemple ci-dessus (avec le groupe libre de rang 2), les  $\alpha$ -résidus sont en bleu, les  $\beta$ -résidus en rouge et les  $\epsilon$ -résidus en vert. Notre exemple n'est pas forcément représentatif car c'est simplement un produit libre et donc  $C = \{1\}$ . Avec les produits libres amalgamés, il faut imaginer que les  $\epsilon$ -résidus ne sont pas disjoints des  $\alpha$ -résidus et des  $\beta$ -résidus.

On construit maintenant un nouveau graphe  $T = (V_2, E_2)$  qui a pour ensemble de sommets  $V_2$  les  $\alpha$ -résidus et les  $\beta$ -résidus. Et pour ensemble d'arêtes les  $\epsilon$ -résidus qui joignent donc des  $\alpha$ -résidus avec des  $\beta$ -résidus. Dans notre exemple, cela donne le graphe suivant :



$T$

Nous allons vouloir montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.25.** *Le graphe  $T$  est toujours un arbre.*

*Démonstration.* Pour cela, nous allons utiliser le théorème 4.19. Montrons dans un premier temps les lemmes suivants.

**Lemme 4.26.** *Pour  $g, h \in G$ , l'action de  $G$  sur  $\Gamma_1$  défini de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} g \cdot (h, \alpha) &= (gh, \alpha) \\ g \cdot (h, \beta) &= (gh, \beta) \end{aligned}$$

*C'est une action par automorphisme de graphe préservant les différents types de résidus.*

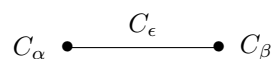
*Démonstration.* On voit facilement que c'est une action par automorphisme de graphe (c'est la même preuve que pour l'action par translation à gauche sur le graphe de Cayley). On remarque aussi que cette action envoie bien les  $\alpha$ -résidus sur des  $\alpha$ -résidus, les  $\beta$ -résidus sur des  $\beta$ -résidus et les  $\epsilon$ -résidus sur des  $\epsilon$ -résidus. En effet, l'action d'un élément sur le graphe ne change pas le type de l'arête et comme c'est une action par automorphisme de graphe, les composantes connexes maximales sont envoyés sur des composantes connexes maximales.  $\square$

Ainsi, l'action définie dans le lemme précédent induit naturellement une action de  $G$  sur le graphe  $T$  (puisque l'action du lemme préserve les résidus). Pour appliquer le théorème 4.19 nous devons montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.27.** *Le domaine fondamental de l'action défini précédemment est un segment.*

*Démonstration.* On considère l' $\alpha$ -résidu  $C_\alpha$  contenant le sommet  $(1_G, \alpha)$  et le  $\beta$ -résidu  $C_\beta$  contenant le sommet  $(1_G, \beta)$ . Les deux sommets  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  sont évidemment adjacents dans  $T$  (car  $(1_G, \beta)$  et  $(1_G, \alpha)$  le sont dans  $\Gamma_1$ ) on note  $C_\epsilon$  un  $\epsilon$ -résidu les joignant. De plus comme l'action de  $G$  sur  $T$  envoie les  $\alpha$ -résidus sur des  $\alpha$ -résidus et les  $\beta$ -résidus sur des  $\beta$ -résidus, il n'existe pas  $g \in G$  tel que  $g \cdot C_\alpha = C_\beta$ .

On va alors montrer que le segment  $T'$  :



Est un domaine fondamental de  $T$  modulo  $G$ .

On sait déjà que  $T$  ne contient pas d'arêtes  $e$  telle que  $o(e) = t(e)$ . Montrons dans un premier temps qu'il ne peut pas y avoir deux arêtes reliant les mêmes sommets dans  $T$ . Soit  $C'_\alpha$  un  $\alpha$ -résidu et  $C'_\beta$  un  $\beta$ -résidu. Nous allons déterminer la forme des éléments de  $C'_\alpha$ . Posons  $T_A$  et  $T_B$  des systèmes de représentants pour les classes à droite modulo  $C$  dans  $A$  et  $B$  respectivement.

Grâce au théorème de structure, on sait que tout élément  $v$  de  $C'_\alpha$  est de la forme suivante :

$$v = (c_v t_{v,1} t_{v,2} \dots t_{v,n_v}, \alpha)$$

Où  $c_v \in C$ ,  $n_v \in \mathbb{N}^*$  et quitte à supposer  $t_{v,1} = 1_A$  on a  $t_{v,i} \in T_A$  si  $i$  est impair et  $t_{v,i} \in T_B$  si  $i$  est pair. En effet il suffit de partir de la forme réduite donnée par le théorème de structure et si le premier représentant est un représentant pour  $B$ , on rajoute  $1_A$  entre celui-ci et l'élément de  $C$  on dit que c'est l' $\alpha$ -forme de cet élément.

On peut montrer la chose suivante : pour tout  $v, v' \in C'_\alpha$  on a  $n_v = n_{v'}$  et pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,  $t_{i,v} = t_{i,v'}$ . Si  $v$  et  $v'$  sont adjacents, on a :

$$c_{v'} t_{v',1} t_{v',2} \dots t_{v',n_{v'}} (c_v t_{v,1} t_{v,2} \dots t_{v,n_v})^{-1} \in S_A$$

Ce qui implique :

$$c_{v'} t_{v',1} t_{v',2} \dots t_{v',n_{v'}} t_{v,n_v}^{-1} \dots t_{v,2}^{-1} t_{v,1}^{-1} c_v^{-1} \in S_A$$

Ce qui implique donc forcément (comme les décompositions sont uniques) que  $n_v = n_{v'}$  et que pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,  $t_{i,v} = t_{i,v'}$ . Ensuite comme  $C'_\alpha$  est connexe, on procède par récurrence sur la longueur des chemins pour montrer le cas où  $v$  et  $v'$  ne sont pas adjacents. On peut donc noter tout élément  $v$  de  $C'_\alpha$  comme  $v = (c_v t_v t_2 \dots t_n, \alpha)$ .

De manière évidente, on peut faire exactement la même chose pour  $C'_\beta$  où les éléments sont de la forme  $v = (c_v t'_v t'_2 \dots t'_{n'}, \beta)$  avec  $t'_v \in T_B$ ,  $t'_i \in T_A$  si  $i$  est pair et  $t'_i \in T_B$  si  $i$  est impair. On dit que c'est la  $\beta$ -forme de cet élément

Montrons qu'il existe au plus un  $\epsilon$ -résidu reliant  $C'_\alpha$  et  $C'_\beta$ . Supposons qu'il y en ait deux, on peut donc trouver  $g_1, g_2 \in G$  tel que  $(g_1, \beta), (g_2, \beta) \in C'_\beta$  et  $(g_1, \alpha), (g_2, \alpha) \in C'_\alpha$  mais  $(g_1, \alpha)$  et  $(g_2, \alpha)$  ainsi que  $(g_1, \beta)$  et  $(g_2, \beta)$  ne peuvent être reliés par un chemin n'utilisant que des arêtes de type  $c$  ou  $\epsilon$ . On note  $(c_{g_1} t_{g_1} t_2 \dots t_n, \alpha)$  l' $\alpha$ -forme de  $g_1$  et  $(c'_{g_1} t'_{g_1} t'_2 \dots t'_{n'}, \beta)$  la  $\beta$ -forme de  $g_2$ . Par définition de ces formes, l'une des deux correspond à la forme réduite de  $g_1$ , on a donc soit  $t_{g_1} = 1_A$  ou  $t'_{g_1} = 1_B$ . On suppose que  $t_{g_1} = 1_A$  et on a donc  $t'_i = t_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n'\}$  (et aussi  $n' = n + 1$ ). Ainsi la  $\beta$ -forme de  $g_1$  est  $(c_{g_1} t_{g_1} t_2 \dots t_{n+1}, \beta)$  et son  $\alpha$ -forme est  $(c_{g_1} 1_A t_{g_1} t_2 \dots t_{n+1}, \alpha)$ . On en déduit que l' $\alpha$ -forme de  $g_2$  est  $(c_{g_2} t_{g_2} t_{g_1} t_2 \dots t_{n+1}, \alpha)$ . Si on suppose que  $t_{g_2} \neq 1_A$  alors ceci implique que la  $\beta$ -forme de  $g_2$  est  $(c_{g_2} 1_B t_{g_2} t_{g_1} t_2 \dots t_{n+1}, \beta) \neq C'_\beta$ . Donc  $t_{g_2} = 1_A$  ce qui implique  $g_2 (g_1)^{-1} = c_{g_2} c_{g_1}^{-1} \in C$ , ainsi il y a une arête de type  $c$  entre  $(g_2, \alpha)$  et  $(g_1, \alpha)$ . On a donc une contradiction et il n'y a au plus qu'un  $\epsilon$ -résidu entre  $C'_\alpha$  et  $C'_\beta$ .

Tout ceci implique que le graphe  $T$  est simplicial. En particulier, pour montrer que le segment  $T'$  est un domaine fondamental, il suffit de montrer que pour tout  $\alpha$ -résidu  $C'_\alpha$  et  $\beta$ -résidu  $C'_\beta$  adjacent dans  $T$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g \cdot C_\alpha = C'_\alpha$  et  $g \cdot C_\beta = C'_\beta$ . Comme  $C'_\beta$  et  $C'_\alpha$  sont adjacents alors il existe  $g \in G$  tel que  $(g, \alpha) \in C'_\alpha$  et  $(g, \beta) \in C'_\beta$ . Et  $g \cdot (1_G, \alpha) = (g, \alpha)$  et  $g \cdot (1_G, \beta) = (g, \beta)$  donc  $g \cdot C_\alpha = C'_\alpha$  et  $g \cdot C_\beta = C'_\beta$ . Donc  $T'$  est bien un domaine fondamental de  $T$ . □

On a de plus que  $\text{Stab}(C_\alpha) = A$ , que  $\text{Stab}(C_\beta) = B$  et que  $\text{Stab}(C_\epsilon) = C$ . Donc par le théorème 4.19 ainsi que les lemmes, le graphe  $T$  est bien un arbre. □

**Remarque.** On peut en réalité montrer que l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} C'_\alpha & \rightarrow & \Gamma(A, S_A) \\ (c_v t_v t_2 \dots t_n, \alpha) & \mapsto & c_v t_v \end{array}$$

est un isomorphisme de graphe. Et donc que chaque  $\alpha$ -résidu est une copie de  $\Gamma(A, S_A)$ . De même, chaque  $\beta$ -résidu est une copie de  $\Gamma(B, S_B)$ .

Ensuite, nous devons montrer la proposition suivante.

**Proposition 4.28.** *L'arbre  $T$  a une infinité de bouts.*



*Démonstration.* On note  $k_1 = |A : C|$  et  $k_2 = |B, C|$  et on va montrer que chaque  $\alpha$ -résidu est adjacent à au moins  $k_1$   $\beta$ -résidus et que chaque  $\beta$ -résidu est adjacent à au moins  $k_2$   $\alpha$ -résidus. Encore une fois, posons  $T_A$  et  $T_B$  des systèmes de représentants pour les classes à droite modulo  $C$  dans  $A$  et  $B$  respectivement. Soit  $C_\alpha$  un  $\alpha$ -résidu de  $T$ . On a vu que chaque élément  $(g, \alpha)$  de  $C_\alpha$  est de la forme  $(c_g t_g t_1 \dots t_n, \alpha)$  avec  $c_g \in C$ ,  $t_g \in T_A$ ,  $t_i \in T_B$  si  $i$  est impair et  $t_i \in T_A$  si  $i$  est pair.

Pour tout  $t \in T_A$  on note  $C_{t,\beta}$  le  $\beta$ -résidu contenant les éléments  $(g, \beta)$  ayant la forme  $(c_g t_g t_1 \dots t_n, \beta)$  avec  $c_g \in C$  et  $t_g \in T_B$ . Pour  $t$  et  $t'$  distincts, les  $\beta$ -résidus  $C_{t,\beta}$  et  $C_{t',\beta}$  sont bien distincts. Chacun d'entre eux est adjacent à  $C_\alpha$  car pour  $c \in C$  et  $t \in T_A$  on a  $(c t t_1 \dots t_n, \alpha) \in C_\alpha$  et  $(c 1_B t t_1 \dots t_n, \beta) \in C_{t,\beta}$  avec  $c t t_1 \dots t_n = c 1_B t t_1 \dots t_n$ . Ainsi,  $C_\alpha$  est adjacent à  $k_1$   $\beta$ -résidus (on peut même montrer que  $C_\alpha$  est adjacent à **exactement**  $k_1$   $\beta$ -résidus). On montre de la même façon que chaque  $\beta$ -résidu est adjacent à au moins  $k_2$   $\alpha$ -résidus.

Ainsi dans notre cas où  $k_1 \geq 3$  et  $k_2 \geq 2$ , cela équivaut à dire que  $T$  est un arbre où une moitié des sommets a un degré supérieur ou égal à 2 et où l'autre moitié a un degré supérieur ou égal à 3. Il est donc évident que  $T$  a une infinité de bouts. □

Pour terminer la preuve, nous devons juste montrer la proposition suivante.

**Proposition 4.29.** *Il existe une injection de  $Bt(T)$  dans  $Bt(\Gamma_1)$ .*

---

*Démonstration.* Soient  $b \in Bt(T)$  et  $r$  un rayon géodésique tel que  $bt(r) = b$ . On note  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des sommets par lesquels passe  $r$ . Comme les  $\alpha$ -résidus, les  $\beta$ -résidus et les  $\epsilon$ -résidus sont connexes alors on peut construire par récurrence un rayon de  $\Gamma_1$  de la manière suivante :

- Pour  $n = 0$ , on construit un chemin (de longueur finie)  $c_0$  partant du résidu correspondant à  $v_0$  et arrivant dans le résidu correspondant à  $v_1$  en passant par l' $\epsilon$ -résidu les joignant.
- Pour  $n \geq 1$ , on construit un chemin (de longueur finie)  $c_n$  partant de l'extrémité de  $c_{n-1}$  et arrivant dans le résidu correspondant à  $v_{n+1}$  en passant par l' $\epsilon$ -résidu les joignant.

La concaténation de ces chemins nous donne un rayon  $r'$ . Montrons que ce rayon est propre. Comme  $r$  est un rayon géodésique de  $T$ , cela signifie que  $r$  ne passe pas plus d'une fois par chaque sommet. Soit  $K$  un compact de  $\Gamma_1$ , la distance entre deux résidus étant supérieure ou égale à 1 et comme  $\Gamma_1$  est localement fini, pour  $n$  assez grand, la composante connexe correspondant à  $v_k$  sera en dehors de  $K$  pour tout  $k \geq K$  (car  $r$  ne passe pas deux fois par le même sommet). Ainsi, cela montre que  $r'$  est un rayon propre.

On pose maintenant  $f : Bt(T) \rightarrow Bt(\Gamma_1)$  et qui à  $bt(r)$  associe  $bt(r')$ . Montrons que cette application est injective. Soit  $r_1$  et  $r_2$  deux rayons géodésiques tels que  $r_1(0) = r_2(0)$  et  $bt(r_1) \neq bt(r_2)$ . Montrons que  $bt(r'_1) \neq bt(r'_2)$ . On sait qu'il existe un compact  $K$  de  $T$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $r_1([N, +\infty[)$  et  $r_2([N, +\infty[)$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $K^c$ . On note  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  les sommets visités par  $r_1$  et  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ceux visités par  $r_2$ . Comme  $r_1$  et  $r_2$  partent du même sommet, qu'ils sont géodésiques, que  $T$  est un arbre et que  $bt(r_1) \neq bt(r_2)$  il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  on a  $u_n \neq v_n$ .

On peut ainsi trouver un compact séparant les résidus correspondant à  $u_N$  et  $v_N$  dans  $\Gamma_1$ . En effet si on prend un élément  $x$  du résidu correspondant  $u_0 = v_0$ . On a vu de plus que le passage de  $u_{N-1} = v_{N-1}$  à  $u_N$  et  $v_N$  via les arêtes de type  $\epsilon$  se fait uniquement en fonction de la classe à droite des éléments modulo  $C$ . Plus précisément si les éléments du résidu correspondant à  $u_{N-1} = v_{N-1}$  sont de la forme  $(c_g t_g t_1 \dots t_n, \alpha)$  (ou  $(c_g t_g t_1 \dots t_n, \beta)$ ) mais on suppose comme l'argument est symétrique qu'on est dans le cas  $\alpha$  avec alors il existe  $t, t' \in T_A$  (ou  $T_B$ ) tel que  $t \neq t'$  et les éléments de forme  $(c_g t t_1 \dots t_n, \alpha)$  sont adjacents à des éléments du résidu correspondant à  $u_N$  pour  $c_g \in C$ . Inversement, les éléments de la forme  $(c_g t' t_1 \dots t_n, \alpha)$  sont adjacents à des éléments du résidu correspondant à  $v_N$  pour  $c_g \in C$ . Et ces éléments sont les seuls adjacents à des éléments de  $u_N$  ou  $v_N$ . Par suite on pose :

$$\rho = \max_{c \in C} (\max(d_{\Gamma_1}(x, (c_g t' t_1 \dots t_n, \alpha)), d_{\Gamma_1}(x, (c_g t t_1 \dots t_n, \alpha))))$$

Et le compact  $B(x, \rho)$  va séparer les résidus correspondant à  $u_N$  et  $v_N$ . Comme  $T$  est un arbre et que les résidus ne sont connectés entre eux que par des  $\epsilon$ -résidus, il existe donc  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $r'_1([N_1, +\infty[)$  et  $r'_2([N_1, +\infty[)$  sortent de  $B(x, \rho)$  et ne soient pas dans la même composante connexe de  $B(x, \rho)^c$ . Donc  $bt(r'_1) \neq bt(r'_2)$  et  $f$  est injective. □

Ainsi,  $\Gamma_1$  et donc  $\Gamma_0$  a une infinité de bouts. Ceci conclut la preuve du théorème.

## 5 Références

- [1] Etienne Ghys, Pierre Harpe (1990) *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhauser Boston Inc.
- [2] Ross Geoghegan (2008) *Topological Methods in Group Theory*, Springer-Verlag New York 2008.
- [3] Martin R. Bridson, André Haefliger (1999) *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.
- [4] Cornelia Druţu, Michael Kapovich (2018) *Geometric Group Theory*, American Mathematical Society.
- [5] John Meier (2008) *Groups, Graphs and Trees*, Cambridge University Press.
- [6] Clara Löh (2017) *Geometric Group Theory : An Introduction*, Springer International Publishing AG 2017.
- [7] Matt Clay, Dan Margalit (2017) *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton University Press.
- [8] Jean-Pierre Serre (1977) *Arbres, Amalgames,  $SL_2$* , Astérisque No. 46, Société Mathématique de France, 1977.