ENS de Rennes
Université Rennes 1

Département de Mathématiques
Rapport de stage

Calcul stochastique et mesure de risques

Élève :
Eliot Thys

Enseignant
Catherine Rainer
Brice Frank

28 août 2022

école normale supérieure rennes — UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Table des matières

1 Introduction

Mon stage avait pour objectif la résolution de deux problèmes en lien avec le domaine de l'assurance. Pour pouvoir modéliser convenablement les problèmes introduits, j'avais besoin d'utiliser des notions nouvelles :

— La notion d'espérance conditionnelle, de martingale.

— L'intégrale d'Itô, le calcul d'Itô.

En effet, les valeurs d'objets boursiers sont soumises à des fluctuations pouvant être décrites par des processus stochastiques. De façon analogue à la physique, pour prévoir la fluctuations d'un prix, il faut résoudre des équations différentielles dites stochastiques. Ainsi ces parties du cours sont importantes pour comprendre de façon générale les mathématiques financières. Néanmoins certaines parties du cours ne sont pas réutilisées dans les problèmes.

Le travail de recherche retranscrira ma réflexion pendant mon stage. Il y a donc des résultats obtenus qui ne sont pas ceux attendus et des directions prises qui ne permettent pas de produire des résultats pertinents. Le premier problème est construit à partir d'un cas réaliste dont la modélisation est complexe. Le deuxième problème fait suite à une volonté de simplification du premier problème, il est donc plus accessible.

2 Espérance conditionelle et martingale

Dans la partie cours, nous utiliserons les résultats sur le mouvement brownien et les processus stochastiques sans les redémontrer car elles ont déjà été traité en lectures dirigées. On pourra se référer au livre de Garllardo "Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corriges. Paris : Hermann". Le cours ci-dessous repose sur les polycopiés de Catherine Rainer "Cours de martingales en temps continu" et "Cours EURIA-Master 1".

2.1 Espérance conditionnelle

Dans la suite de ce chapitre, on travaillera dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $X = Y$ si $X = Y$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Définition 1. *Soit $\mathcal{A}$ un événement et X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ intégrable, on note :*

$$E[X|A] = \frac{E[X\mathbb{1}_A]}{P(A)}.$$

Remarque 1. *On remarque qu'en prenant $X = \mathbb{1}_B$, on obtient $P(B|A) = E[\mathbb{1}_B|A]$.*

Définition et propriété 1. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Ω inclue dans $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire (donc $\mathcal{F}$-mesurable). On définit $E[X|\mathcal{T}]$ comme l'unique variable $\mathcal{T}$-mesurable* *tel que pour tout A élèment de $\mathcal{T}$*

$$E[X\mathbb{1}_A] = E[E[X|\mathcal{T}]\mathbb{1}_A]. \ (1)$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire.
La démonstration de ce théorème utilise le théorème de Radon-Nikodym.
Dans le cas où X est L^2, on peut simplement appliquer le théorème de projection sur un convexe fermé en voyant $E[X|\mathcal{T}]$ comme la projection de X $\mathcal{F}$-mesurable sur l'ensemble des variables $\mathcal{T}$ mesurable.
Dans le cas plus général, on pose $Q(A) = E_{\mathbb{P}}[X\mathbb{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{T}$.
Q est une mesure sur $\mathcal{T}$ et est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ (en voyant $\mathbb{P}$ comme une mesure sur $\mathcal{T}$).
En effet, pour tout $A \in \mathcal{T}$ tel que $Q(A) = 0$, on a $E[Z\mathbb{1}_A] = 0$ Donc le théorème de Radon-Nikodym nous assure qu'il existe une unique variable aléatoire Z $\mathcal{T}$-mesurable tel que $Q(A) = E_{\mathbb{P}}[Z\mathbb{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{T}$
On a alors $Z = E[X|\mathcal{T}]$ □

Remarque 2. *La condition (1) est équivalente à $E[XZ] = E[E[X|\mathcal{T}]Z]$ pour tout Z $\mathcal{T}$ mesurable et bornée.*
En effet, Z est limite d'une suite d'applications qui sont des combinaisons linéaires d'indicatrices $\mathcal{T}$ mesurables.

Définition 2. *Soit Y une variable aléatoire de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose alors $E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$.*

Propriété 2.1.1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ des événements de la tribu $\mathcal{T}$ formant une partition dénombrable de Ω.*
Alors on a :

$$E[X|Y] = \sum_{i\in I} E[X|A_i]\mathbb{1}_{A_i}.$$

Démonstration. En reprenant les notations de la propriété :

— $\sum_{i\in I} E[X|A_i]\mathbb{1}_{A_i}$ est $\mathcal{T}$ mesurable.

— Soit $A \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} E[\sum_{i\in I} E[X|A_i]\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_A] &= E[\sum_{i\in I} E[X|A_i]\mathbb{1}_{A\cap A_i}] \\ &= E[E[X|A]\mathbb{1}_A] \\ &= E[\frac{E[X\mathbb{1}_A]}{P(A)}\mathbb{1}_A] \\ &= E[X\mathbb{1}_A]. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1. *Soit Y une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans un ensemble au plus dénombrable U. Alors :*

$$E[X|Y] = \sum_{y \in U} E[X|Y = y]\mathbb{1}_{\{Y=y\}}$$

Démonstration. On sait que $(Y = y)$ pour $y \in U$ forment une partition de Ω. Donc on conclut grâce au théorème précédent et la définition de $E[X|Y]$. □

Propriété 2.1.2. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à densité jointe $f_{X,Y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout h fonction bornée :*
$E[h(X)|Y] = \int_{\mathbb{R}} h(X) f_{X|Y}(x|Y)dx$ avec :

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & si\ f_Y(y) \neq 0 \\ s(x) & sinon. \end{cases}$$

avec s une densité sur $\mathbb{R}$ quelconque.

Démonstration. Soit g une fonction $\sigma(Y)$ mesurable et s une densité sur $\mathbb{R}$.
En posant $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} h(X) f_{X|Y}(x|Y)dx$, on remarque que ϕ est $\sigma(Y)$ mesurable.
Montrons alors que $E[g(Y)h(X)] = E[g(Y)\phi(Y)]$

$$\begin{aligned}
E[g(Y)h(X)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(y)h(x) f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X,Y}(x,y)dxdy \text{ (d'après le théorème de Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}\cap\{f_Y \neq 0\}} f_Y(y)g(y) \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dxdy + E[\mathbb{1}_{\{f_Y=0\}}g(Y)h(X)] \\
&= \int_{\mathbb{R}\cap\{f_Y \neq 0\}} f_Y(y)g(y) \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dxdy \text{ car } (\lambda(f_Y = 0)) = 0 \\
&= E[\mathbb{1}_{\{f_Y \neq 0\}}g(Y)\phi(Y)] + E[\mathbb{1}_{\{f_Y=0\}}g(Y)\phi(Y)] \\
&= E[g(Y)\phi(Y)].
\end{aligned}$$

□

Propriété 2.1.3. *Soit X une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{G}$ une tribu incluse dans $\mathcal{F}$.*

- *1. $X \mapsto E[X|\mathcal{G}]$ est linéaire,*
- *2. $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$,*
- *3. Soit $\mathcal{H}$ une sous tribu de $\mathcal{G}$, alors $E[E[X|\mathcal{G}]|H] = E[X|\mathcal{H}]$,*
- *4. $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ si X est indépendante de $\mathcal{G}$,*
- *5. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et XY intégrable, alors $E[XY|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]Y$. Si X est $\mathcal{G}$ mesurable, $E[X|\mathcal{G}] = X$,*
- *6. Si $X \geq 0$, alors $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$.*

Démonstration. — 2. En prenant $Z = 1$, on obtient $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.

— 3. $E[X|G]$ vérifie par définition pour tout Z $\mathcal{G}$-mesurable, $E[XZ] = E[E[X|\mathcal{G}]Z]$. Donc cela reste vrai pour Z' $\mathcal{H}$-mesurable. Donc pour tout Z' $\mathcal{H}$-mesurable, $E[E[X|\mathcal{G}]Z'] = E[XZ']$.
Donc $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$.

— 4. Soit X une variable indépendante de $\mathcal{G}$. On a alors pour Z $\mathcal{G}$ mesurable, $E[XZ] = E[E[X]Z]$
Donc $E[X\mathcal{G}] = E[X]$.

— 5. Soit Z $\mathcal{G}$-mesurable, alors ZY l'est aussi. Donc $E[XYZ] = E[E[X|\mathcal{G}]YZ]$
Or $E[X|\mathcal{G}]Y$ est $\mathcal{G}$-mesurable. D'où $E[X|\mathcal{G}]Y = E[XY|\mathcal{G}]$.

— 6. Soit $X \geq 0$, donc $E[E[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] = E[X\mathbb{1}_A] \geq 0$ pour tout A $\mathcal{G}$-mesurable
On a $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$.

□

Remarque 3. *Les 3 premiers points peuvent être vu comme des propriétés de projections orthogonales. En reprenant les notations :*

— *(1) La projection est linéaire,*

— *(3) La projection successive sur des espaces décroissants $\mathcal{H}_1, ...\mathcal{H}_n$ revient à projeter directement sur l'espace le plus petit $\mathcal{H}_n$.*

La propriété 2 permet de démontrer une forme généralisée une formule semblable à la formule des probabilités totales (appliqué a l'espérance) :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} E[X|Y = y]P_Y(dy).$$

On retrouve aussi les théorèmes classiques de limite sous intégrale.

Propriété 2.1.4. — *1. Soit X une variables aléatoires intégrables positives et X_n une suite croissante de variable aléatoire positive intégrable de limite X alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$,*

— *2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives, alors $E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$,*

— *3. Soit X une variable aléatoire intégrable et X_n une suite de variables aléatoires intégrables ayant pour simple $\mathbb{P}$-presque sûre X et tel qu'il existe une variable aléatoire Z tel que $|X_n| \leq Z$ $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$,*

— *4. Soit f une fonction croissante convexe et X une variable aléatoire tel que $f(X)$ soit intégrable, on a $f(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[f(X)|\mathcal{G}]$.*

Démonstration. — 1. On pose $Y = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} supE[X_n|\mathcal{G}]$ car l'espérance conditionnelle est croissante. Donc $\lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable
Soit $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } E[Y\mathbb{1}_A] &= \limsup_{n\to\infty} E[E[X_n|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] \text{ (Croissance monotone)}\\ &= \limsup_{n\to\infty} E[X_n\mathbb{1}_A] \text{ (par définition)}\\ &= E[X\mathbb{1}_A] \text{ (Croissance monotone).}\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = Y = E[X|\mathcal{G}].$$

— 2.On remarque que $\lim_{n\to\infty} inf X_n$ est une limite croissante.
Donc on a

$$E[\lim_{n\to\infty} inf X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[inf X_n|\mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} inf E[X_n|\mathcal{G}],$$

En effet pour tout $k > N$,

$$\inf_{n>N} X_n \leq X_k,$$

Donc pour tout $k > N$

$$E[\inf_{n>N} X_n|\mathcal{G}] \leq E[X_k|\mathcal{G}],$$

Donc pour tout $k > N$

$$E[\inf_{n>N} X_n|\mathcal{G}] \leq \inf_{n>N} E[X_k|\mathcal{G}].$$

— 3. Les preuves suivantes ont les mêmes démonstrations que celle faites en théorie de la mesure.

□

2.2 Martingale

Définition 3. *Soit* $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un processus. on dit que le processus* (X_t) *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

— *pour tout* $t \geq 0$, $E[|X_t|] < \infty$.

— *pour tout* $0 \leq s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

Dans le cas où la filtration est naturelle, on dit simplement que (X_t) *est une martingale.*

Remarque 4. — *Soit* (X_t) *une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. *Alors* $(E[X_t])_t$ *est constant.*
En effet :

$$E[X_t] = E[E[X_t]|\mathcal{F}_0] = E[X_0].$$

— *Soit* X_t *une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,a]}$ *avec a un réél positif. Alors connaître* X_a *et* $\mathcal{F}_t$ *pour* $t \in [0, a]$ *nous donne accès à tout le processus grâce à la formule :*

$$E[X_a|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

— *-Soit* Y *une variable aléatoire intégrable et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration, alors* $X_t = E[Y|\mathcal{F}_t]$ *est une martingale.*
En effet, soit $0 \leq s \leq t$

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = E[E[Y|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E[Y|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

— *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes, centrée et intégrable. Soit* $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ *et* $(\mathcal{F}_n)$ *la tribu naturelle de* S_n*. Alors* S_n *est une martingale.*
En effet, soit $0 \leq p \leq n$ *:*

$$E[S_n|\mathcal{F}_p] = E[\sum_{k=0}^{n} X_k|\mathcal{F}_p] = E[\sum_{k=0}^{p} X_k|\mathcal{F}_p] + E[\sum_{k=p+1}^{n} X_k|\mathcal{F}_p],$$

Donc

$$E[S_n|\mathcal{F}_p] = \sum_{k=p+1}^{n} E[X_k] + \sum_{k=0}^{p} X_k = \sum_{k=p+1}^{n} E[X_k] + S_p$$

,
Donc

$$E[S_n|\mathcal{F}_p] = S_p.$$

Définition 4. *Définition du mouvement brownien et caractérisation*
Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *et prenant* $T = \mathbb{R}^+$ *un processus à valeur réel. on dit que* B *est un mouvement brownien si il vérifie les hypothèses :*

— $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$ *p.s*
— $\forall (s,t)$ *tel que* $0 \leq s \leq t$*, alors* $B_t - B_s$ *est de loi* $\mathcal{N}(0, t-s)$
— $\forall (s,t)$ *tel que* $0 \leq s \leq t$*, alors* $B_t - B_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$

De plus :
Un mouvement brownien est un processus gaussien centré tel que :

— $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$ *p.s*
— $\forall t, s \geq 0$, $\mathbb{E}(B_t B_s) = min(s,t)$

Réciproquement, un processus X *vérifiant les hypothèses précédentes est un mouvement brownien naturel (c'est a dire vis à vis de sa filtration naturelle).*

Exemple fondamentale de martingale issues du mouvement brownien : Soit B_t un mouvement brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Alors :

— 1. (B_t),
— 2. $(B_t^2 - t)$,
— 3. $(e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t})$ avec σ un réél.

sont des martingales

Démonstration. Soit $0 \leq s \leq t$:

— 1.

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_{\int}] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s = B_s \end{aligned}$$

— 2. Remarquons que

$$B_t^2 = (B_t - B_s + b_t)^2 = B_s^2 + (B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s)$$

Donc :

$$\begin{aligned} E[B^2 - t|F_s] &= E[B_s^2|\mathcal{F}_s] + E[((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_f] + 2E[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] - t \\ &= B_s^2 + E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s]]B_s - t \\ &= B_s^2 + t - s - t = B_s^2 - s \end{aligned}$$

— 3.

$$\begin{aligned} E[e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}|\mathcal{F}_s] &= E[e^{\sigma(B_t - B_s) + B_s}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+s}|\mathcal{F}_s] \\ &= E[e^{\sigma(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}e^{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s}|\mathcal{F}_s] \\ &= E[e^{\sigma(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s]e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}e^{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \\ &= E[e^{\sigma(B_t - B_s)}]e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}e^{\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \end{aligned}$$

Or $E[e^{\sigma(B_t - B_s)}]$ est la fonction caractéristique de la loi $N(0, t-s)$ évaluée en $-i\sigma$. On obtient alors $E[e^{\sigma(B_t - B_s)}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$ et on conclut.

□

Définition 5. *Soit $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un processus adapté. on dit que le processus (X_t) est une surmartingale (respectivement sousmartingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

- *pour tout $t \geq 0$, $E[|X_t|] < \infty$*
- *pour tout $0 \leq s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ (respectivement $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$*

Exemple :Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Alors $(X_t^2)_{t\geq 0}$ est une sous martingale.
En effet, l'inégalité de Jensen appliquée avec la fonction carré nous assure que

$$E[X_t^2|\mathcal{F}_s] \geq E[X_t|\mathcal{F}s]^2 = X_s^2$$

Propriété 2.2.1. *Inégalité de Doob Soit X_t une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,T]}$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :*

$$P[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| \geq C] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_T|]}{C}.$$

Démonstration. La démonstration passe par la notion de temps d'arrêt que nous n'aborderons pas ici. □

3 Calcul stochastique

Dans cette partie, les processus stochastiques seront des processus stochastiques adaptés $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ avec $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une filtration fixée.
De plus, le processus noté B sera un mouvement brownien $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (B_t)_{t\in[0,T]})$.

3.1 Introduction à la variation quadratique

Définition 6. *Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = t$ une subdivision de [0,t] Notons*

$$\langle X, X \rangle_t = \limsup_{sup|t_{k+1}-t_k| \to 0} \sum_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2,$$

avec la limite supérieure prise sur toutes les subdivisions possibles finies possibles. La convergence est une convergence en probabilité.
On note $\mathcal{M}^2$ les $(\mathcal{F}_t)$-martingales continues, de carré intégrale. De plus, on definit la variation d'un processus (X_t) comme le sup sur l'ensemble des subdivions (t_k) de $[0, T]$ de $\sum_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$.

Propriété 3.1.1. — *Si (X_t) est un processus continu à variation finie, alors $\langle X, X \rangle_t = 0$*
— *si $(X_t) \in \mathcal{M}^2$, alors $\langle X, X \rangle_t$ est un processus à valeurs finies,$\mathcal{F}_t$ adapté, continue et croissant.*

Démonstration. — Soit (X_t) un processus à variation finie. Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle X, X \rangle_t \leq & \limsup_{sup|t_{k+1}-t_k| = 0} \sum_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 \\ & \leq \max_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \sum_k |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|. \end{aligned}$$

Or (X_t) est à variation finie et $\max_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$ tend vers 0. Donc par par théroème d'encadrement, on déduit que

$$\langle X, X \rangle_t = 0$$

.

— On admet ce résultat.

□

Propriété 3.1.2. *Soit $M \in \mathcal{M}^2$, alors $(M_t^2 - \langle M, M \rangle)_t$ est une martingale.*

Démonstration. soit $M \in \mathcal{M}^2$, s et t tel que $0 \leq s \leq t \leq T$ et (t_n) une subdivion telle que $M_{t_n}^2 = M_t^2$ et $M_{t_0}^2 = M_s^2$.
Alors :

$$M_t^2 - M_s^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{t_{k+1}}^2 - M_{t_k}^2).$$

De plus, soit k un entier positif plus petit que n,

$$\mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_{t_{k+1}}^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_{t_k}^2 - 2M_{t_k} M_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_s]$$

Donc,

$$\mathbb{E}[(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_{t_{k+1}}^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[[M_{t_k}^2 - 2M_{t_k} M_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_{t_{k+1}}^2] - \mathbb{E}[M_{t_k}^2].$$

Donc par télescopage,

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s].$$

Donc en passant à la limite,

$$\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s|\mathcal{F}_s].$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^2 - \langle M, M\rangle_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_s^2|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s|\mathcal{F}_s] \\ &= M_s^2 + \langle M, M\rangle_s.\end{aligned}$$

□

Corollaire 2. *Si $M \in \mathcal{M}^2$ à variation finie, alors M est constant.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}^2$. Alors $\langle M, M\rangle_t = 0$, donc M^2 est une martingale.
En posant $M'_t = M_t - M_0$, on a $\mathbb{E}[(M'_t)^2] = 0$ pour tous $t \in [0, T]$. Donc $M'_t = 0$ et $M_t = M_0$ pour tous $t \in [0, T]$.

□

Propriété 3.1.3. *Soit $M \in \mathcal{M}^2$, $\langle M, M\rangle_t$ est l'unique processus (X_t), nul en 0 et croissant, tel que $(M_t^2 - X_t)$ soit une martingale.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}^2$.
Existence : on sait que $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est bien une martingale nulle en zéro et croissante.
Unicité : Soit (A_t) un processus nul en 0 et croissant tel que $B_t = (M_t^2 - A_t)$ soit une martingale.
Alors

$$B_t - (M^2 - \langle M, M\rangle_t) = A_t - \langle M, M\rangle_t$$

est toujours une martingale croissante nulle en 0.
Alors la différence est à variation finie. En effet, soit π une subdivision de $[0, T]$,

$$\sum_\pi |(A_{t_{k+1}} - \langle M, M\rangle_{t_{k+1}} - A_{t_k} + \langle M, M\rangle_{t_k}| \leq \sum_\pi |(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}| + \sum_\pi |\langle M, M\rangle_{t_{k+1}} - \langle M, M\rangle_{t_k}|.$$

Donc

$$\sum_\pi |(A_{t_{k+1}} - \langle M, M\rangle_{t_{k+1}} - A_{t_k} + \langle M, M\rangle_{t_k}| \leq A_T + B_T < \infty.$$

Alors $(A_t - \langle M, M\rangle_t)$ est constante nulle. Donc $A_t = \langle M, M\rangle_t$.

□

3.2 Intégrale stochastique

Définition 7. *Soit $T > 0$, on pose $\mathcal{L}^2 = L^2([0, T] \times \Omega)$ l'ensemble de tous les processus stochastiques $(\mathcal{F}_t)$ adaptés carré intégrable. On prend alors comme norme :*

$$||H||_{2,T}^2 = \mathbb{E}[\int_0^T H_t^2 dt] = \int_\Omega \int_0^T H_t(w)^2 dt d\omega,$$

avec H un processus stochastique dans $\mathcal{L}^2$

Définition 8. *On dit qu'un processus stochastique $H \in \mathcal{L}^2$ est simple si :*

$$\begin{cases} H_0 = \xi_0 \\ H_t = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n \mathbb{1}_{]t_n,t_{n+1}]} \text{ avec } t \in]0,T] \end{cases}$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et (t_n) une subidivision de cardinal $N+1$ de $[0,T]$, ξ_n étant $\mathcal{F}_{t_n}$-mesurable et $\mathbb{E}[\xi_n^2] < +\infty$.
Notons S l'ensemble des processus simples.

Propriété 3.2.1. *$\mathcal{L}^2$ est un Hilbert*

Démonstration. Il faut montrer que l'ensemble des processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté est un fermé. Le reste vient des propriétés de $L^2([0,t] \times \Omega)$.
Soit $t \in [0,T]$ et $(H_t^n) \in \mathcal{L}^2$ tendant vers $H \in L^2([0,T] \times \Omega)$. Alors il existe $\phi(n)$ tel que :

$$H_t^{\phi(n)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} H_t(\omega)$$

$\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque sûrement.
Soit B l'ensemble de mesure produit nulle telle que $H_t^{\phi(n)}(\omega)$ ne converge pas simplement.
Soit B l'ensemble des (ω, t) tel que $H_t^{\phi(n)}(\omega)$ ne converge pas.
Soit $A_t = (\omega|(\omega,t) \in B)$. Alors $\mathbb{P}(A_t) = 0$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Donc pour presque tout $t \in [0,T]$, $H_t^{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} H_t$. $H_t^{\phi(n)}$ étant $\mathcal{F}_t$ mesurable, H_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour presque tout $t \in [0,T]$.
$\mathcal{L}^2$ étant l'ensemble des classes d'équivalence des variables $\mathbb{P} \otimes \lambda$ presque partout égales, donc existe $(\tilde{H_t}) \sim (H_t)$ qui est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \in [0,T]$.
Donc la limite de $(H_t^{\phi(n)})$ dans $\mathcal{L}^2$ est bien $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \in [0,T]$. □

Propriété 3.2.2. *S est dense dans $\mathcal{L}^2$.*

Démonstration. On rappelle que $\mathcal{L}^2$ est un Hilbert de produit scalaire $< X, Y >_{\mathcal{L}^2} = \mathbb{E}[\int_0^T X_u Y_u du]$. Soit $K \in \mathcal{L}^2$. Il suffit de montrer que $\langle K, Y \rangle = 0$ pour tous $Y \in S$ implique que $K = 0$.
Soit $0 < s < t$,
En prenant F $\mathcal{F}_s$ mesurable, borné et $H = F\mathbb{1}_{[s,t[}$. alors :

$$E[F \int_s^t K_u du] = 0, \tag{3.1}$$

On pose alors

$$X_t = \int_0^t K_u du.$$

— On remarque que X_t est fini $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout $t \in [0,T]$. Donc X_t est continu.

— Selon l'inégalité de Cauchy Schwarz, X_t est dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$,

— D'après (3.1),

$$\mathbb{E}[F\int_s^t K_u du] = \mathbb{E}[FX_t - FX_s] = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}[FX_t] = \mathbb{E}[FX_s]$$

Ceci étant vrai pour toutes variables F $\mathcal{F}_s$ mesurable et borné,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

Ceci étant vrai pour tous (s,t) dans $[0,T]^2$, $(X_t)_t$ est une martingale.

— (X_t) est à variation finie, en effet, en prenant $0 = t_0 < ... < t_n = t$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| &= \sum_{k=0}^{n} |\int_{t_k}^{t_{k+1}} K_u du| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |K_u| du \\ &\leq \int_0^t |K_u| du.\end{aligned}$$

Donc selon le corollaire 2, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est constant, et $X_0 = 0$, donc $X_t = 0$ $\mathbb{P}$ presque sûrement, pour tout $t \in [0,T]$.
Donc $\int_0^t K_u du = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Donc $K_u = 0$ presque partout par rapport à $(\lambda \otimes P)$.
Donc $K_s = 0$ dans $\mathcal{L}^2$. □

Construction de l'intégrale stochastique par rapport à B

On construit l'intégrale stochastique de façon analogue à la manière dont on a construit l'intégrale de Riemann. On commence par construire l'intégrale dans le cas des processus stochastiques dans S puis on prolongera au fonction dans $\mathcal{L}^2$ par des arguments de continuité.
On pose :

$$\int_0^T H_s dB_s = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

et

$$\int_0^t H_s dB_s = \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i (B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)}),$$

avec (t_i) la subdivision associé à H_s et (B_t) un mouvement brownien fixé pour la suite du chapitre.

Propriété 3.2.3. *Soit $H \in S$*
La fonction $H \mapsto (\int_0^t H_s dB_s)_{t\in[0,T]}$ est continue et linéaire.

Démonstration. Cela découle directement de la continuité du mouvement brownien. L'homogénéité découle de la definition. En prenant X et Y dans S, et en notant (t_i) et (t'_i) leur subdivision. En ordonnant les t_i et t'_i, on peut obtenir une nouvelle subdivision de [0,T] commune à X et Y. La linéarité est alors claire. □

Propriété 3.2.4. *Pour tout $H \in S$,*

- *(1) $(\int_0^t H_s dB_t)_{t\in[0,T]}$ est $\mathcal{F}_t$ adapté,*
- *(2) $\int_0^0 H_s dB_s = 0$,*
- *(3) $(\int_0^t H_s dB_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale, ie $\mathbb{E}[\int_0^t H_r dB_r|\mathcal{F}_s] = \int_0^s H_r dB_r$,*

Démonstration.

- (1) Soit $t \in [0,T]$, $\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)})$ ne fait intervenir que des fonctions $\mathcal{F}_t$ adapté.
- (2) Direct
- (3) Soit $0 \leq s \leq t \leq T$. Alors on sépare $\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)})$ selon les termes plus petits que s et ceux plus grands que s. Notons alors r l'entier tel que $t_r < s \leq t_{r+1}$ Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)}) = \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)}) + (B_{r+1} - B_r)\xi_r$$
$$+ \sum_{i=r+2}^{N-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)}).$$

On peut alors étudier chaque partie (par linéarité de l'espérance conditionelle). Tout d'abord,

$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{r-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_s] = \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i(B_{min(t_{i+1},t)} - B_{min(t_i,t)}),$$

(car $\mathcal{F}_s$ -intégrable)
Ensuite,

$$\mathbb{E}[(B_{t_{r+1}} - B_{t_r})\xi_r|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_{t_{r+1}}\xi_r|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[B_{t_r}\xi_r|\mathcal{F}_s]$$

Donc par les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle et le fait que le mouvement brownien est une martingale,

$$\mathbb{E}[(B_{t_{r+1}} - B_{t_r})\xi_r|\mathcal{F}_s] = (B_s - B_{t_r})\xi_r.$$

Pour finir, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{i=r+2}^{N-1}\xi_i(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_s] &= \sum_{i=r+2}^{N-1}\mathbb{E}[\xi_i(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_s]\\
&= \sum_{i=r+2}^{N-1}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_i(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_{min(t_i,t)}]|\mathcal{F}_s]\\
&= \sum_{i=r+2}^{N-1}\mathbb{E}[\xi_i([\mathbb{E}[B_{min(t_{i+1},t)}|\mathcal{F}_{min(t_i,t)}]-B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_s]\\
&= \sum_{i=r+2}^{N-1}\mathbb{E}[\xi_i(B_{min(t_i,t)})-B_{min(t_i,t)})|\mathcal{F}_s]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien $\int_0^s H_r dB_r$.

□

Propriété 3.2.5. — *(1) Pour tout $t \geq 0$ et $H \in S$, $\mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$, on appelle cette égalité l'isométrie d'Itô (pour l'instant réduit au cas de $H \in S$),*

— *(2) Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[(\int_0^t H_r dB_r)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t H_r^2 dr|\mathcal{F}_s] + (\int_0^s H_r dB_r)^2$*

Démonstration. — (1)Soit $t \geq 0$ et $H \in S$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{i=0}^{N-1}\xi_i(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{t_i\wedge t}))^2]\\
&= \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N}\xi^2_{min(t_i,t)}(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})^2\\
&+ 2\sum_{i<j}\xi_{min(t_i,t)}\xi_{min(t_j,t)}(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)}(B_{min(t_{j+1},t)}-B_{min(t_j,t)}]\\
&= \sum_{i=0}^{N}\xi^2_{min(t_i,t)}\mathbb{E}[(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})^2]\\
&+ 2\sum_{i<j}\mathbb{E}[\xi_{min(t_i,t)}\xi_{min(t_j,t)}(B_{min(t_{i+1},t)}-B_{min(t_i,t)})(B_{min(t_{j+1},t)}-B_{min(t_j,t)})]\\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{N}\xi^2_{min(t_i,t)}(min(t_{i+1},t)-min(t_i,t))(\text{Voir ci-dessous *})\\
&= \mathbb{E}(\int_0^t H_t^2 dt).
\end{aligned}$$

Il nous reste à justifier * :
Pour cela, nous rappellons que si X est intégrable, alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X].$$

Pour des raisons visuelles, à partir de maintenant je négligerai les min en indices. Donc soit $i < j$:

$$\begin{aligned} E[\xi_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\xi_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\xi_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})]|\mathcal{F}_{t_j}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j}]\xi_{t_j}\xi_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \qquad = 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_{t_i}^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]] \\ &= \mathbb{E}[\xi_i^2\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]] \\ &= \mathbb{E}[\xi_i^2\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2]] \text{ (par indépendance)} \\ &= \mathbb{E}[\xi_i^2(t_{i+1} - t_i)]. \end{aligned}$$

— (2) Soit $0 \leq s \leq t \leq T$ et $H \in S$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\int_0^t H_r dB_r)^2|\mathcal{F}_s] =& \mathbb{E}[\sum_{i=0}^N \xi_{t_i}^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}] \\ &+ 2\mathbb{E}[\sum_{i<j} \xi_{t_i}\xi_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_i}] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{i=0,t_i>s}^N \xi^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\sum_{i=0,t_i\leq s}^N \xi^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_s] \\ &+ 2\mathbb{E}[\sum_{i<j} \xi_{t_i}\xi_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_{t_i}] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{i=0,t_j\leq s}^N \xi_i^2(t_{i+1} - t_i)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\sum_{i=0,t_i>s}^N \xi^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_s] \\ &+ 2\mathbb{E}[\sum_{i<j,t_j\leq s} \xi_{t_i}\xi_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &+ 2\mathbb{E}[\sum_{i<j,t_j>s} \xi_{t_i}\xi_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(\int_s^t H_r dB_r)^2|\mathcal{F}_s] + \sum_{i=0,t_i\leq s}^N \xi_i^2(t_{i+1} - t_i) \\ &+ 2\sum_{i<j,t_j\leq s} \xi_{t_i}\xi_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \text{ (car } \mathcal{F}_s \text{ mesurable)} \end{aligned}$$

$+ 0$ (car si $t_j > s$, alors quitte à mettre une filtration intermédiaire, on fait apparaitre $\mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$ qui vaut 0)

$$= \mathbb{E}[(\int_s^t H_r dB_r)^2|\mathcal{F}_s] + (\int_0^s H_r dB_r)^2.$$

□

Corollaire 3. *Soit $H \in S$ et $t \in [0, T]$*
$\mathbb{E}[\int_0^t H_s dB_s] = 0$ *et* $Var(\int_0^t H_s dB_s) = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$.

Propriété 3.2.6. *Une martingale est d'espérance constante.*
D'où $\mathbb{E}[\int_0^t H_s dB_s] = \mathbb{E}[\int_0^0 t H_s dB_s] = 0$,
$Var(\int_0^t H_s dB_s) = \mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] - \mathbb{E}[\int_0^t H_s dB_s]^2 = \mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$.

<u>Dans le cas $\mathcal{L}^2$</u>
Soit $H \in \mathcal{L}^2$, Par densité de S dans $\mathcal{L}^2$ il existe $H^{(n)}$ dans S qui tend vers H.
Donc $\mathbb{E}[\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds] \longrightarrow 0$
Or selon l'isométrie d'Itô, $\mathbb{E}[(\int_0^T H_s^{(m)} - H_s^{(n)} dB_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^T (H_s^{(m)} - H_s^{(n)})^2 dt]$
Donc $(\int_0^T H_s^{(n)} dBs)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet.
Donc $(\int_0^T H_s^{(n)} dBs)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega)$.
Le fait que $\int_0^T H_s dB_s$ ne dépend pas de la suite de Cauchy découle de l'isométrie d'Itô.

Propriété 3.2.7. *Soit* $H \in \mathcal{L}^2$

- *(1)* $H \mapsto \int_0^t H_s dB_s$ *est liénaire.*
- *(2)* $(\int_0^t H_s dB_s)$ *est une martingale.*
- *(3) Pour tout* $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[\int_0^t H_s dB_s)^2] = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds$, *c'est l'isométrie d'Itô.*
- *(4)* $(\int_0^t H_s dB_s)$ *est* $\mathcal{F}_s$*-adapté et continu* P*-presque sûrement.*
- *(5)* $((\int_0^t H_s dB_s)^2 - \int_0^t H_t^2 ds)$ *est une martingale.*

Démonstration. — (1) La linéarité se montre par passage à la limite.

— (2) Soit H^n dans S qui tend vers $H \in \mathcal{L}^2$. Soit $A \in \mathcal{F}_s$ et $t \in [s, T]$.
Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^t H_r - H_r^n dBr] &\leq \mathbb{E}[(\mathbb{1}_A(\int_0^t H_r - H_r^n dBr)^2] \text{ (C-S)} \\ &\leq \mathbb{E}[(\int_0^t H_r - H_r^n dBr)^2] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ (par définition de } H_n).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^t H_r^n dBr] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^t H_r dBr]$$

Et

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^t H_r^n dBr] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^s H_r^n dBr] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^s H_r dBr]$$

On conclu par unicité de la limite que :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^s H_r dBr] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_0^t H_r dBr],$$

Donc

$$\mathbb{E}[\int_0^t H_r dBr | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_0^s H_r dBr].$$

— (3) On résonne de la même façon, soit $H_n \in \mathcal{L}^2$ tendant vers H dans $\mathcal{L}^2$ et $t \in [0;T]$:
D'une part

$$\mathbb{E}[(\int_0^t H_s^n dB_s)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[(\int_0^t H_s dB_s)^2)],$$

dans L^2
D'autre part

$$\mathbb{E}[\int_0^t (H_s^n)^2 ds] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds],$$

car H_n a pour limite H dans $\mathcal{L}^2$. Sachant que l'isométrie d'Itô est vraie dans S, on a pour tous $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[\int_0^t H_s^n dB_s)^2)] = \mathbb{E}[\int_0^t (H_s^n)^2 ds].$$

Donc par unicité de la limite, l'isométrie d'Itô se prolonge sur $\mathcal{L}^2$.

— (4) On sait que $(\int_0^t H_s dB_s)$ est limite d'une fonction $\mathcal{F}_s$ adapté.
Soit $(H_t) \in \mathcal{L}^2$ et (H_t^n) une suite de S tendant vers (H_t) dans $\mathcal{L}^2$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \int_0^t H_s^n dB_s$ est continu. Supposons de plus que

$$\mathbb{E}[\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds] \le \frac{1}{n^4}.$$

Or $(\int_0^T H_s^n - H_s dBs)^2$ est une martingale.
Donc en utilisant l'inégalité de Doob, on a :

$$\begin{aligned} P(\sup_{0\le t\le T}(|\int_0^t H_s^n - H_s dBs|^2 > \frac{1}{n^2}) &\le n^2 \mathbb{E}[(\int_0^T H_s^n - H_s dBs|)^2] \\ &= n^2 \mathbb{E}[\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds] \text{ (isométrie d'Itô)} \\ &\le \frac{1}{n^2} \text{ (donc sommable).} \end{aligned}$$

Donc selon Borel-Cantelli, en posant $A_n = \{\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t H_s^n - H_s dBs| > \frac{1}{n}\}$, alors :

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\ge n} \bar{A}) = 1$$

Soit $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\ge n} \bar{A}$, Donc à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n > n_0$, on a : $\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t H_s^n - H_s dB_s|(\omega) \le 1/n$.
Donc $t \mapsto \int_0^t H_s^n dBs(\omega)$ converge uniformement vers $t \mapsto \int_0^t H_s dBs(\omega)$.
Donc $t \mapsto \int_0^t H_s dBs(\omega)$ est continue.

— (5) De la même façon que pour l'isométrie d'Itô, on peut prolonger

$$\mathbb{E}[(\int_0^t H_r dB_r)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t H_r^2 dr | \mathcal{F}_s] + (\int_0^s H_r dB_r)^2$$

de S à $\mathcal{L}^2$.
Alors en prenant $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^t H_r dB_r|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\int_0^t H_r^2 dB_r|\mathcal{F}_s] &= (\int_0^s H_r dB_r)^2 + \mathbb{E}[\int_s^t H_r^2 dr|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\int_0^t H_r^2 dB_r|\mathcal{F}_s] \\
&= (\int_0^s H_r dB_r)^2 - \mathbb{E}[\int_0^s H_r^2 dr|\mathcal{F}_s] \\
&= (\int_0^s H_r dB_r)^2 - \int_0^s H_r^2 dr \text{ (car } \int_0^s H_r^2 dr \text{ est } \mathcal{F}_s\text{mesurable)} .
\end{aligned}$$

□

Propriété 3.2.8. *Soit H et K dans $\mathcal{L}^2$ et $t \in [0, T]$. Alors*

$$\mathbb{E}[\int_0^t H_s dBs \int_0^t K_s dBs] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s K_s dBs]$$

Démonstration. En gardant les notations, on a en employant 2 fois l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}[(\int_0^t (H_r - K_r) dB_r)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t (H_r - K_r)^2 dr] = \mathbb{E}[\int_0^t H_r^2 - 2K_r H_r + H_r^2 dr].$$

Alors

$$\mathbb{E}[(\int_0^t (H_r - K_r) dB_r)^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t H_r dBr)^2] + \mathbb{E}[(\int_0^t K_r dBr)^2] + 2\mathbb{E}[\int_0^t H_r K_r dB_r].$$

Donc en développant à gauche de l'expression on obtient :

$$\mathbb{E}[\int_0^t H_s dBs \int_0^t K_s dBs] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s K_s dBs]$$

□

3.3 Variation quadratique et intégrale d'Itô

L'intégrale d'Itô permet alors d'obtenir de nouveaux résultats intéressants sur la variation quadratique.

Propriété 3.3.1. — *(1) $\langle B, B \rangle_t = t$,*
— *(2) Soit $H \in \mathcal{L}^2$, $\langle \int_0^t H_r dB_r, \int_0^t H_r^2 dB_r \rangle_t = \int_0^t H_r dr$,*
— *(3) Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des processus K $\mathcal{F}_t$ mesurable tel que $\mathbb{E}[\int_0^T |K_r| dr] < \infty$, Alors $X_t = \int_0^t K_s ds$ est de variation quadratique nulle.*

Démonstration. — (1) et (2) découle de l'unicité de la propriété précédente.
— (3) En reprenant les notations, on montre que (X_t) a pour variation finie $\int_0^t |K_s| ds$ par des inégalités simples. De plus il est continu.
Donc X_t est de variation quadratique nulle.

□

Définition 9. *Variation quadratique croisée Soit (X_t) et (Y_t) des processus tel que*

$$\langle X-Y,X-Y\rangle_t<\infty$$
$$\langle X+Y,X+Y\rangle_t<\infty$$

On pose alors

$$\langle X,Y\rangle_t=\frac{1}{4}(\langle X+Y,X+Y\rangle_t-\langle X-Y,X-Y\rangle_t)$$

Propriété 3.3.2. *: Soit X,Y des processus définis tel que les propriétés ci-dessus soit vérifiées.*

- *(1) En supposant que la limite existe, $\langle X,Y,\rangle_t=\limsup_{\sup|t_{k+1}-t_k|\to 0}\sum_k(X_{t_{k+1}}-X_{t_k})(Y_{t_{k+1}}-Y_{t_k})$,*
- *(2) $|\langle X,Y\rangle_t|\leq \langle X,X\rangle_t^{\frac{1}{2}}\langle Y,Y\rangle_t^{\frac{1}{2}}$,*
- *(3) Si N et M sont deux $\mathcal{F}_s$-martingales continues, alors $(M_tN_t-\langle M,N\rangle_t)$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale,*
- *(4) $X_t=\int_0^t H_sdBs$ et $Y_t=\int_0^t H'_sdBs$*
  Alors
  $$\langle X,Y\rangle_t=\int_0^t H'_sH_sds,$$
- *(5) Soient (X_t) et (Y_t) deux processus tels que $\langle X,X\rangle_t<\infty$ et (Y_t) à variation finie. Alors $\langle X,Y\rangle=0$.*

Démonstration. On garde la notation de la propriété.

- (1) On remarque que
  $$((X_{t_{k+1}}+Y_{t_{k+1}})-(X_{t_k}+Y_{t_k}))^2-((X_{t_{k+1}}-Y_{t_{k+1}})-(X_{t_k}-Y_{t_k}))^2=4(X_{t_{k+1}}-X_{t_k})(Y_{t_{k+1}}-Y_{t_k})$$
  Alors pour toutes subdivisions π_n de [0,t], on a
  $$\sum_{\pi_n}((X_{t_{k+1}}+Y_{t_{k+1}})-(X_{t_k}+Y_{t_k}))^2-((X_{t_{k+1}}-Y_{t_{k+1}})-(X_{t_k}-Y_{t_k}))^2=4\sum_{\pi_n}(X_{t_{k+1}}-X_{t_k})(Y_{t_{k+1}}-Y_{t_k})$$
  On obtient alors la relation recherché.

- (2) On réutilise la relation (1) à laquelle on applique Cauchy-Schwarz :
  Soit π_n une subdivision de $[0,t]$,
  $$|\sum_{k\in\pi_n}(X_{t_{k+1}}-X_{t_k})(Y_{t_{k+1}}-Y_{t_k})|\leq(\sum_{k\in\pi_n}(X_{t_{k+1}}-X_{t_k})^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k\in\pi_n}(Y_{t_{k+1}}-Y_{t_k})^2)^{\frac{1}{2}}$$
  On passe alors à la limite.
- (3) Remarquons que :
  $$\begin{aligned}XY_t-\langle X,Y\rangle_t&=\frac{1}{4}(\langle X+Y,X+Y\rangle_t-\langle X-Y,X-Y\rangle_t-(X+Y)^2+(X-Y)^2)\\&=\frac{1}{4}(\langle X+Y,X+Y\rangle_t-(X+Y)^2-(\langle X-Y,X-Y\rangle_t-(X-Y)^2))\end{aligned}$$
  Donc $XY_t-\langle X,Y\rangle_t$ est une somme de martingale, donc est une martingale.

— (4) Soit $H, H' \in \mathcal{L}^2$, et $X_t = \int_0^t H_s dBs$ et $Y_t = \int_0^t H'_s dBs$ Alors

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_t &= \frac{1}{4}(\int_0^t (H_s + H'_s)^2 dBs - (\int_0^t (H_s - H'_s)^2 dBs \\ &= \frac{1}{4}(4\int_0^t (H_s H'_s dBs).\end{aligned}$$

— (5) Soit X tel que $\langle X, X\rangle_t < \infty$ et Y un processus à variation finie. Alors en appliquant (5), on obtient $|\langle X, Y\rangle_t| = 0$

□

Corollaire 4. *La fonction $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ est bilinéaire et symétrique et vérifie :*

$$\langle X + Y, X + Y\rangle_t = \langle Y, Y\rangle_t + \langle X, X\rangle_t + 2\langle X, Y\rangle_t$$

Démonstration. Même calcul que pour les produits scalaires. □

Remarque 5. *Outre le fait que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$ n'est pas à valeur dans $\mathbb{R}$, on retrouve toutes les propriétés classiques du produit scalaire.*

3.4 Processus d'Itô

Définition 10. *On appelle processus d'Itô un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, t \in [0, T],$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, $K \in \mathcal{L}^1$, $H \in \mathcal{L}^2$. On note I l'ensemble des processus d'Itô.

Propriété 3.4.1. *Tout processus d'Itô se décompose de façon unique en $X_t = X_0 + M_t + V_t$ avec M une martingale et V une variable à variation finie.*

Démonstration. Soit deux décompositions $X_t = X_0 + M_t + V_t$ et $X_t = X'_0 + M'_t + V'_t$ On évalue en 0, alors $X_0 = X'_0$
Donc $M'_t + V'_t = M_t + V_t$, ie $M'_t - M_t = V'_t - M_t$
Donc $(M'_t - M_t)$ est à la fois une martingale continue et à variation finie.
Donc $M'_t = M_t$ et $V'_t = V_t$ □

Propriété 3.4.2. *Soit $X \in I$ et $K, H \in \mathcal{L}^2$ tel que $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds$ Alors $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$*

Démonstration. On garde les notations, et pour simplifier on prends $X_0 = 0$, et on développe :

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle_t &= \langle \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds, \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds\rangle \\ &= \langle \int_0^t H_s dBs, \int_0^t H_s dBs\rangle + \langle \int_0^t K_s ds, \int_0^t K_s ds\rangle + 2\langle \int_0^t H_s dBs, \int_0^t K_s ds\rangle \\ &= \int_0^t H_s^2 ds \text{ (en utilisant le théorème précédent).}\end{aligned}$$

□

Notation On note de façon équivalente :

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t, X_0 = 0$$

et

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Définition 11. *Soit $X \in I$, $H \in \mathcal{L}^2$ et $\mathcal{K} \in \mathcal{L}^1$ tel que $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$. Pour tout H' tel que $H'H \in \mathcal{L}^2$ et $H'K \in \mathbb{L}^1$, on définit alors l'intégrale stochastique par rapport à X par :*

$$\int_0^t H'_s dX_s = \int_0^t H'_s H_s dB_s + \int_0^t H'_s K_s ds$$

ou de façon équivalente

$$H'_s dX_s = H'_t K_t dt + H'_t H_t dB_t$$

Remarque 6. *Le processus $(\int_0^t H'_s dX_s)$ est toujours dans I et garde la propriété de martingale ou de variation finie de (X_t).*
En effet, si par exemple X_t est une martingale, on peut remarquer $X_t - \int_0^t H_s dBs - X_0$ est une martingale continue à variation finie.
On déduit alors que $\int_0^t K_s ds = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc $K_s = 0$ Donc $(\int_0^t H'_s dX_s) = \int_0^t H'_s H_s dB_s$ qui est clairement une martingale.

3.5 La formule d'Itô

Propriété 3.5.1. *Formule d'Itô multidimensionnelle.*
Soit $(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n) \in I^n$. et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Alors, pout tous $t \in [0, T]$:

$$f(X_t^1, ..X_t^n) = f(X_0^1, ...X_0^n) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t^1, ..X_t^n) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t^1, ..X_t^n) d\langle X_i, X_j \rangle_s$$

Démonstration. La démonstration passe par des propriétés non établies dans ce stage et plus largement la notion de semimartingale permettant une construction plus générale que l'intégrale d'Itô. Pour la preuve détaillée, on pourra se référer à la preuve du polycopié "CALCUL STOCHASTIQUE ET FINANCE" de Peter Tankov et Nizar Touzi.
La clé de la démonstration repose cependant sur une idée simple : utiliser l'égalité de Taylor avec :

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{k \in \pi}^n (f X_{t_{k+1}}) - f(X_{t_k})$$

pour $t_0 < .. < t_n$ une subdivision de $[0, t]$ (pour le cas unidimensionnelle).

□

Remarque 7. *Pour un fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on obtient une formule plus simple qui correspond à la formule d'Itô unidimensionnelle : pour tout $t \in [0, T]$:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_t) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(X_t) d\langle X, X \rangle_s$$

Corollaire 5. *Formule du produit*
Soit (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô.
Alors, pour tout $t \in [0,T]$:

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

Démonstration. Soit $f : (x,y) \mapsto xy$ et (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô.
Alors avec la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} X_tY_t &= X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t d\langle X, Y\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t d\langle Y, X\rangle_s \\ &= X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t. \end{aligned}$$

□

3.6 Exponentielle de Doleans-Dade, théorème de représentation des martingales

Lemme 1. *Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui vérifie :*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Soit $(X_t) \in I$ une martingale. Alors sous les bonnes conditions d'intégrabilité, le processus $f(\langle X, X\rangle_t, X_t)$ est encore une martingale vérifiant :

$$f(\langle X, X\rangle_t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\langle X, X\rangle_s, X_s) dX_s$$

Démonstration. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de la forme $f(t,x)$ vérifiant l'hypothèse du lemme et (X_t) une martingale. On rappelle que $\langle\langle X, X\rangle\rangle_t = 0$ et que $\langle\langle X, X\rangle, X\rangle_t = 0$

$$\begin{aligned} f(\langle X, X\rangle_t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\langle X, X\rangle_s, X_s) dX_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(\langle X, X\rangle_s, X_s) d\langle X, X\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\langle X, X\rangle_s, X_s) d\langle X, X\rangle_s \\ &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\langle X, X\rangle_s, X_s) dX_s. \end{aligned}$$

Comme (X_s) est une martingale, $\int_0^t H_s dX_s$ l'est aussi pour tout H_s □

Propriété 3.6.1. *Soit $X_t = \int_0^t H_s dB_s$ où $(H_t) \in \mathcal{L}^2$ vérifie $\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds}] < \infty$.*
Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le processus suivant est une martingale :

$$\epsilon^\lambda(X) = \exp\left(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle X, X\rangle_t\right) = \exp\left(\lambda \int_0^t H_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t H_s^2 dB_s\right)$$

C'est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dZ_t = \lambda Z_t dX_t,\ Z_0 = 1$$

que l'on appelle exponentielle de Doléan-Dade.

Démonstration. Soit $f(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$. Cette fonction vérifie bien l'équation du lemme 1. En prenant $X_t = \int_0^t H_s dB_s$ où $(H_t) \in \mathcal{L}^2$ vérifie $\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds}] < \infty$. D'une part, on peut donc appliquer le propriété 4.6.1 qui nous assure que

$$\begin{aligned} Z_t = f(\langle X, X\rangle_t, X_t) &= \exp(\lambda \int_0^t H_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t H_s^2 ds) \\ &= exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle X, X\rangle_t) \\ &= 1 + \int_0^t \lambda Z_s dX_s. \end{aligned}$$

est une martingale qui vérifie bien

$$dZ_t = \lambda Z_t dX_t,\ Z_0 = 1$$

□

Propriété 3.6.2. *Théorème de Lévy Soit (X_t) un processus d'Itô et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration. Alors les deux assertions sont équivalentes :*

- *(X_t) est une martingale continue telle que $\langle X, X\rangle_t = t$, $X_0 = 0$*
- *(X_t) est un mouvement brownien.*

Remarque 8. *On vient d'établir une deuxième caractérisation du mouvement brownien.*

Démonstration. Le sens réciproque a déjà été montré précédemment.
Soit (X_t) est une martingale continue telle que $\langle X, X\rangle_t = t$, alors
$(e^{\lambda X_t - \frac{\lambda^2 t}{2}})$ est une martingale selon 4.5.1. Donc par conditionnement successifs, on obtient pour tout $t_0 < .. < t_n$ et $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iu_1(X_{t_1} - X_{t_0} + ..iu_1(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{iu_1(X_{t_1} - X_{t_0} + ..iu_1(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}]|\mathcal{F}_{t_1}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{iu_1(X_{t_3} - X_{t_2} + ..iu_1(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}]|\mathcal{F}_{t_1}]e^{\frac{-1}{2}u_1^2(t_1 - t_0)} \\ &= ... \\ &= e^{-\frac{1}{2}u_1^2(t_1 - t_0) + ... + u_n^2(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Donc les lois de dimensions finies de (X_t) sont les mêmes que celles du mouvement brownien, donc X_t est un mouvement brownien par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

□

Propriété 3.6.3. *Théorème de représentation des martingales. Supposons la filtration engendré par le mouvement brownien. Alors pour toute $\mathcal{F}_t$ martingale (M_t) de carré intégrable, il existe $H \in \mathcal{L}^2$ tel que pour tout $t \in [0, T]$:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s.$$

Démonstration. Soit h une fonction déterministe dans $L^2([0, T])$ telle que $\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T h(s)ds\right) < \infty$ et posons :

$$Y_t = e^{\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds},$$

Alors Y une exponentielle de Doléans-Dade, elle vérifie donc :

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s) dB_s.$$

Etant une martingale, on peut évaluer en 0 et passer à l'espérance pour obtenir :

$$Y_t = \mathbb{E}[Y_t] + \int_0^t Y_s h(s) dB_s.$$

On remarque qu'il existe donc $H_s = Y_s h(s)$ tel que Y soit de la forme espérée. Cela reste vrai pour les combinaisons linéaires de variable de la forme $Y_t = e^{\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds}$ avec des $h \in L^2([0,T])$.
On suppose de plus que cet ensemble Γ est dense dans $L^2(\mathcal{F}_T)$.
Soit $Y \in L^2(\mathcal{F}_T)$, alors il existe une suite de Cauchy dans Γ tendant vers Y. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe H^n telle que

$$Y^n = \mathbb{E}[Y^n] + \int_0^t H_s^n dB_s,$$

Etant une suite de cauchy, en prenant $\epsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n, m > p, \mathbb{E}[(Y^m - Y_n)^2] < \epsilon$,
on a donc en développant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y^n - Y^m)^2] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y^n] + \int_0^T H_s^n dBs - (\mathbb{E}[Y^m] + \int_0^T H_s^m dBs)|^2], \\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[Y^n] - \mathbb{E}[Y^m])^2 + \mathbb{E}[\int_0^T (H_s^n - H_s^m)^2] + 2(\mathbb{E}[Y^n] - \mathbb{E}[Y^m])^2 \int_0^T (H_s^n - H_s^m)^2 ds], \\
&= (\mathbb{E}[Y^n] - \mathbb{E}[Y^m])^2 + \mathbb{E}[\int_0^T (H_s^n - H_s^m)^2 ds].
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[\int_0^T (H_s^n - H_s^m)^2 ds] < \epsilon,$$

Donc (H^n) est de cauchy dans $\mathcal{L}^2$, donc converge vers H.
De plus, $H \mapsto \int_0^T H_s dB_s$ étant continue (isométrie d'Itô), cela assure que le passage à la limite se fait aussi sous l'intégrale :

$$Y_T = \mathbb{E}[Y] + \int_0^T H_s dB_s,$$

et en conditionnant par $\mathcal{F}_t$ on obtient :

$$Y_t = \mathbb{E}[Y] + \int_0^t H_s dB_s,$$

$\square$

3.7 Equations différentielles stochastiques

On se place dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on prend $T > 0$ un horizon fini et d un entier non nul. Soit

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d\times n}$$

Soit (B_t) un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ dont la filtration est $(\mathcal{F}_t)$. Soit Z_0 une variable $\mathcal{F}_0$ mesurable.

Définition 12. *On appelle équation différentielle stochastique (EDS) une équation du type :*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{3.2}$$

ou de façon équivalente

$$dX_t = b(s, X_s)ds + \sigma(x, X_s)dB_s, X_0 = Z, \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

On appelle tout processus d'Itô (X_t) solution forte de l'EDS si elle vérifie (3.2).

Propriété 3.7.1. *Soit $T < 0$ et $\|.\|$ la norme canonique sur $\mathbb{R}^d$ ou sur $\mathbb{R}^{d\times n}$ (on l'a note de la même façon pour gagner du temps),*

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d\times n} \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$$

deux fonctions dans $L^2[0, T]$ pour $t = 0$ tel que vérifiant, avec $D > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T], \|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq D\|x - y\| \tag{3.3}$$

Soit (B_t) un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ dont la filtration est $(\mathcal{F}_t)$ et Z une variable aléatoire $\mathbb{F}_0$ mesurable tel que $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$.
Alors il existe une unique solution au problème

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, X_0 = Z$$

Démonstration. Reprenons les notations de l'énoncé.
Plaçons nous dans le cas n=d=1. La démonstration dans le cas général est la même. L'idée de la démonstration est d'utiliser le théorème du point fixe de Banach. Il faut donc montrer que la fonction :

$$U(X_t) := Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dBs$$

est contractante. Pour cela on pose la norme, avec $c > 0$:

$$\|H\|_c^2 := \mathbb{E}[\int_0^T e^{-ct}(H_s)^2 ds]$$

On remarque que pour tout $H \in \mathcal{L}^2$, on a le résultat :
$\|H\|_{\mathcal{L}^2} e^{-ct} \leq \|H\|_c \leq \|H\|_{\mathcal{L}^2}$.
Donc les normes sont équivalentes.
Montrons que pour $X \in \mathcal{L}^2$, on a $U(X) \in \mathcal{L}^2$.
Notons que grâce au caractère lipschitzien de σ par rapport à la première variable, on

déduit pour $(t, X_t) \in [0,T]\mathcal{L}^2$, il existe $K > 0$ tel que,

$$\|\sigma(t, X_t)\|^2 \leq K(\|\sigma(0, X_t)\|^2 + \|X_t\|^2),$$

et

$$\|b(t, X_t)\|^2 \leq K(\|\sigma(0, X_t)\|^2 + \|X_t\|^2),$$

Alors

$$\mathbb{E}[\int_0^T U(X)^2 ds] \leq 3T\|Z\|_{\mathcal{L}^2} + 3\mathbb{E}[\int_0^T (\int_0^t b(s, X_s)ds)^2 dt] + 3\mathbb{E}[\int_0^T (\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s)^2 dt].$$

On peut majorer chaque morceaux :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^T (\int_0^t b(s, X_s)ds)^2 dt] &\leq \mathbb{E}[\int_0^T t \int_0^t b(s, X_s)^2 ds dt] \text{ (d'après Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq T\mathbb{E}[\int_0^T TK(b(0, X_t)^2 + X_t^2)dt] \\
&\leq T^2 K\mathbb{E}[\int_0^T b(0, X_t)^2 + X_t^2 dt] < \infty.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^T (\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s)^2 dt] &\leq \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds dt] \text{ (d'après l'isométrie d'Itô)} \\
&\leq T\mathbb{E}[\int_0^T K(\sigma(0, X_t)^2 + X_t^2 dt] \\
&\leq TK\mathbb{E}[\int_0^T \sigma(0, X_t)^2 + X_t^2 dt] < \infty.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer le caractère contractant de U.
Soit $X, Y \in \mathbb{L}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(U(X) - U(Y))^2] &\leq \mathbb{E}[2(\int_0^T b(s, X_s) - b(s, Y_s)ds)^2 + \int_0^T \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)dB_s)^2] \\
&\leq \mathbb{E}[2t \int_0^T (b(s, X_s) - b(s, Y_s))^2 ds + \int_0^T (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2 ds] \\
&\leq \mathbb{E}[2(T+1)K \int_0^T (X_s - Y_s)^2 ds].
\end{aligned}$$

On conclut alors la preuve avec :

$$
\begin{aligned}
\|U(X)-U(Y)\|_c &= \mathbb{E}[\int_0^T e^{-ct}\mathbb{E}[U(X)-U(Y)^2]dt] \\
&\leq 2(T+1)K\int_0^T e^{-ct}\mathbb{E}[X_t-Y_t]^2dt \\
&= \frac{2(T+1)K}{c}(\int_0^T e^{-ct}\mathbb{E}[X_t-Y_t]^2ds - e^{-cT}\int_0^T \mathbb{E}[X_t-Y_t]^2dt) \text{ (IPP)} \\
&\leq \frac{2(T+1)K}{c}\int_0^T \mathbb{E}[X_t-Y_t]^2e^{-ct}(1-e^{-(T-t})dt \\
&\leq \frac{2(T+1)K}{c}\int_0^T \mathbb{E}[X_t-Y_t]^2e^{-ct}dt \\
&= \frac{2(T+1)K}{c}\|X-Y\|_c.
\end{aligned}
$$

Donc U est contractante pour c assez grand.
Le théorème du point fixe nous assure donc l'unicité et l'existence d'une solution forte.

□

4 Applications et exemples

Cette partie correspond à deux exercices qui étaient sous forme de plusieurs questions. Ces exercices me semblaient importants pour illustrer le cours et apportent des résultats intéressants en complément du cours.

4.1 Integrale de Wiener-Itô

Soit $T>0$ et $a<b\leq c<d$, (B_t) un mouvement brownien sur $[0,T]$. L'objectif de cet exercice est de s'intéresser à $I_{a,b}=\int_a^b f(s)dB_s$ lorsque $f\in L^2[0,T]$.

Propriété 4.1.1. *En gardant les notations,*

$$I_{a,b}=\int_a^b f(s)dB_s = B_{\int_a^b f(s)^2ds}$$

Démonstration. On montre le résultat en deux temps : on travaille avec les fonctions escaliers puis par densité on se ramène à l'ensemble des fonctions dans $\mathbb{L}^2[0,T]$.

— Dans le cas d'une fonction f escalier, en prenant (t_i) une subdivision de $[0,T]$ convenable vis à vis de f.
Alors

$$I_{a,b}=\sum_i f(t_i)B_{t_{i+1}}-B_{t_i},$$

Donc $I_{a,b}$ est suit un loi normale centré de variance $\int_a^b f(t_i)^2ds$.

— Prenons maintentant $f \in L^2[0,T]$. Les fonctions escaliers étant denses dans $L^2[0,T]$, on peut prendre f_n tel que $\|f_n - f\|_{L^2[0,T]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Donc
$$\mathbb{E}[\int_a^b (f_n(s)-f(s))^2 ds] = \int_a^b (f_n(s)-f(s))^2 ds,$$
Donc
$$\|f_n - f\|_{L^2[0,T]} = \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^2},$$
Donc d'après l'isométrie d'Itô, $\int_a^b f_n(s) - f(s)dBs \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $L^2(\Omega)$.
De plus, la limite en loi d'une suite de variable gaussienne est une gaussienne dont la variance et l'espérance sont les limites de l'espérance et de la variance de la suite de variable gaussienne. Ici on a convergence dans $L^2(\Omega)$, donc convergence en loi.
Donc
$$\mathbb{E}(\int_a^b f(s)dBs) = 0, Var(\int_a^b f(s)dBs) = \int_a^b f(t_i)^2 ds.$$
Maintenant intéressons nous au couple $(I_{a,b}, I_{c,d})$.
Prenons encore une suite $(I^n_{a,b}, I^n_{c,d}) = (\int_a^b f_n(s)dB_s, \int_c^d f_n(s)dB_s)$ ($I^n_{a,b}$ et $I^n_{c,d}$ sont indépendants :
L'indépendance $I^n_{a,b}$ et $I^n_{c,d}$ nous assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$Var(\int_a^d f_n(s)dB_s) = Var(\int_a^b f_n(s)dB_s) + Var(\int_c^d f_n(s)sB_s)$$
En passant à la limite à gauche et à droite, on obtient :
$$Var(\int_a^d f(s)dB_s) = Var(\int_a^b f(s)dB_s) + Var(\int_c^d f(s)sB_s)$$
Ce qui assure que $I_{a,b}$ et $I_{c,d}$ sont indépendants (car de covariance nulle et sont des varaibles gaussiènes).
Donc $(I_{a,b}, I_{c,d})$ est gaussien. Prouvons maintenant que $(I_t) = (I_{0,t})$ est un processus gaussien.
Soit (t_1, t_2) et (a_1, a_2) (on devrait prendre $(t_1, .., t_n)$ et $(a_1, .., a_n)$ mais cela allège la démonstration).
$$a_1 I_{t_1} + a_2 I_{t_2} = I_{t_1}(a_1 + a_2) + a_2 I_{t_1,t_2}$$
Donc selon ce qui précède, comme $0 \le t_1 \le t_2$, $a_1 I_{t_1} - a_2 I_{t_2}$ est bien gaussien.
Regardons maintenant la fonction de covariance de $(I_t) =$, soit $a \le b \in [0,T]$:
$$\begin{aligned}
Cov(I_a, I_b) &= \mathbb{E}[\int_0^a f(s)dB_s \int_0^b f(s)dB_s] \\
&= \mathbb{E}[(\int_0^a f(s)dB_s)^2 + \int_0^a f(s)dB_s \int_a^b f(s)dB_s] \\
&= \mathbb{E}[(\int_0^a f(s)dB_s)^2] + \mathbb{E}[\int_0^a f(s)dB_s]\mathbb{E}[\int_a^b f(s)dB_s] \\
&= \int_0^a f(s)^2 ds \\
&= min(\int_0^a f(s)^2 ds, \int_0^b f(s)^2 ds).
\end{aligned}$$

De plus, $I_0 = 0$.
La caractérisation du mouvement brownien permet alors de conclure que $\underline{I_t = B_{\int_0^t f(s)^2 ds}}$.

□

4.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus de Ornstein-Uhlenbeck est un des processus permettant de modéliser les taux d'intérêt et les taux de change. Il est aussi utilisé en physique dans des phénomènes de diffusion.
Ce processus est défini comme la solution d'un EDS que nous allons étudier :

$$dR_t = \sigma dB_t - \theta R_t dt, R_0 = r_0 \text{ avec } (\sigma, \theta, r_0) \in \mathbb{R}^3, \text{ pour tout } t \in [0, T] \tag{4.1}$$

Propriété 4.2.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1[0, T]$ et (X^t) une martingale de carré intégrable. Alors :*

$$dX_t f(t) = f(t) dX_t + X_t f'(t) dt, \tag{4.2}$$

Démonstration. La formule d'Itô nous assure pour (X^t) une martingale de carré intégrable
et $f \in \mathcal{C}^2[0, T]$.

$$dX_t f(t) = f(t) dX_t + X_t f'(t) dt + \langle X, f \rangle_t.$$

Or $\langle X, X \rangle_t < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$ et $\langle f, f \rangle_t \leq \int_0^t |f'(s)| ds$. Donc

$$\langle X, f \rangle_t = 0$$

□

Revenons maintenant à (4.1). On remarque que $(t, X_t) \mapsto \sigma$ et $(t, X_t) \mapsto X_t$ vérifie les hypothèses du théorème 4.7.1, on obtient alors l'existence et l'unicité d'une solution à (4.1).

Propriété 4.2.2. *Soit (R_t) le processus solution de (4.1), alors (R_t) est un processus gaussien vérifiant :*

$$R_t = \int_0^t e^{\theta(s-t)} \sigma dB_s + r_0 e^{-\theta t}.$$

et

$$\mathbb{E}[R_t] = r_0 e^{-\theta t}, Var[R_t] = \int_0^t (e^{\theta t} \sigma)^2 dt.$$

Démonstration. Soit R_t la solution de (4.1), posons

$$Y_t = e^{\theta t} R_t.$$

En développant on obtient à l'aide de la formule (4.2)

$$dY_t = e^{\theta t} \sigma dB_s, Y_0 = r_0$$

Donc
$$R_t = e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta s}\sigma dB_s + r_0 e^{-\theta t} = \int_0^t e^{\theta(s-t)}\sigma dB_s + r_0 e^{-\theta t}.$$
$B_{\int_0^t (e^{\theta(t-s)}\sigma)^2 ds}$ étant un processus gaussien, R_t l'est aussi. De plus
$$\mathbb{E}[R_t] = r_0 e^{-\theta t}, Var[R_t] = \int_0^t (e^{\theta t}\sigma)^2 dt.$$
On aurait pu trouver l'espérance sans passer par la résolution explicite :
On passe à l'espérance dans (4.1) et avec le théorème de Fubini, on peut retrouver un équation différentielle homogène d'ordre 1 donc la solution est l'espérance de (R_t). □

4.3 Théorème de Clark-Okone :

Ce résultat sera réutilisé dans le premier problème.

Propriété 4.3.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ une fonction à dérivé bornée. Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ sa filtration. Alors :*
$$\mathbb{E}[f(B_1)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(B_1)] + \int_0^t \mathbb{E}[f'(B_1)|\mathcal{F}_s]dB_s$$

Démonstration. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ de dérivé bornée.
Travaillons, pour $t \in [0,T]$, sur la martingale :
$$\mathbb{E}[f(B_1)|\mathcal{F}_t]$$
On a
$$\mathbb{E}[f(B_1)|\mathcal{F}_t] = \psi(t, B_t)$$
avec $\psi(t,B_t) = \mathbb{E}[f(x+B_{1-t})]_{|x=B_t}$ (on considère x comme une constante qu'on évalue après le calcul de l'espérance). Cette égalité se démontre par le lemme de factorisation et en décomposant $B_1 = B_t + B_1 - B_t$. On admet que ψ est $\mathcal{C}^2$.
On peut utiliser la formule d'Itô pour :
$$\begin{aligned}\psi(t,B_t) =& \psi(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}[f(x+B_{1-s})]_{|x=B_t} dB_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}[f(x+B_{1-t})]_{|x=B_t} ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\mathbb{E}[f(x+B_{1-t})]_{|x=B_t} ds\end{aligned}$$
Or $\psi(t,B_t) - \psi(0,B_0) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}[f(x+B_{1-s})]_{|x=B_t} dB_s$ est une martingale de carré intégrable, et par l'égalité qui précède, à variation finie.
Donc elle est constante.
Donc
$$\psi(t,B_t) - \psi(0,B_0) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}[f(x+B_{1-s})]_{|x=B_t} dB_s = \psi(0,B_0) - \psi(0,B_0) = 0$$
D'autre part, le théorème de convergence dominé nous assure, que comme f est $\mathcal{C}^1$ de dérivé bornée :
$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}[f(x+B_{1-t}] = \mathbb{E}[f'(x+B_{1-t})]$$
□

5 Mesure de risque

Les mesures de risques sont des fonctions mathématiques permettant à une entreprise de quantifier un risque de perte ou de gain d'argent en fonction d'un événement. Elles sont essentielles dans les prises de décision financière d'une entreprise ou dans les placements boursiers. Ce sont donc des outils indispensables dans une entreprise pour son fonctionnement.
L'objectif ce stage est de poser un mesure de risque qui prenne en compte la possibilité de gérer son portefeuille.
Le premier problème sera introduction à une situation où un individu doit placer de l'argent en bourse. La modélisation se fera en temps continu.
Le deuxième problème est un modèle simplifié tel que les résultats soient plus accessibles. On travaille en temps discret. L'objectif de ce problème est de se mettre à la place d'une assurance qui cherche à optimiser des investissements.
Les deux problèmes ont été mené parallèlement. Ils simulent des situations analogues mais leur modélisation diffère. Ainsi leur traitement se fait avec des outils distincts.

5.1 Définition de la mesure de risques et exemple

Soit une ensemble mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{F}$ l'ensemble des variables aléatoires réélles.

Définition 13. *On appelle mesure de risque toute fonction R :*

$$R : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que si X et Y sont de même loi, alors $R(X) = R(Y)$ On dit alors que R est :

- *Homogène, ie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $R(X)$, on a $R(\lambda X) = \lambda R(X)$,*
- *Croissante, ie pour tous $X \leq Y$, alors $R(X) \leq R(Y)$,*
- *Translatable, ie pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(X+t) = R(X) + t$,*
- *Sous additive, ie pour tout X, Y, $R(X+Y) \leq R(X) + R(Y)$.*

Par exemple l'espérance est une mesure de risque qui est homogène, croissante, translatable, sous additive.

La suite donne un exemple moins trivial de mesure de risque.

Définition 14. *Soit $X \in \mathbb{F}$, on note F_X sa fonction de répartition.*
On appelle quantile de X la fonction :

$$F_X^{-} :]0,1[\to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \inf(x; F_x \geq \alpha).$$

Définition 15. *Valeur à Risques :*
Soit $\alpha \in]0,1[$ et $X \in \mathbb{F}$. On pose :

$$VaR(X, \alpha)) = F_X^{-}(\alpha).$$

Propriété 5.1.1. *Soit g une fonction réelle strictement croissante continue à gauche et $X \in \mathbb{F}$. Alors pour $\alpha \in]0,1[$:*

$$VaR(g(X),\alpha) = g(VaR(X,\alpha))$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0,1[$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ et g une fonction réelle strictement croissante et continue à gauche. Alors on pose $g^-(y) = \sup\{x : g(x) \le y\}$. De façon générale, on sait que $g^- \circ g = Id$. De même, la croissance stricte nous assure que :

$$\{x : g(x) \le y\} =]-\infty, g^-(y)[,$$

ou

$$\{x : g(x) \le y\} =]-\infty, g^-(y)].$$

Donc $F_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(X \le g^-(y)) = F_X(g^-(y))$.
Montrons que :

$$\inf\{g(y) : F_{g(X)}(g(y)) \ge \alpha\} = \inf\{z : F_{g(X)}(z) \ge \alpha\}$$

$\inf\{g(y) : F_{g(X)}(g(y)) \ge \alpha\} \ge \inf\{z : F_{g(X)}(z) \ge \alpha\}$ est naturel.
L'autre sens se montre ainsi :
Soit $x \in \{z : F_{g(X)}(z) \ge \alpha\}$,
alors comme $\alpha > 0$, $x > \inf\limits_{\beta\in\mathbb{R}}(g(\beta))$.

- Soit $x \in Im(g)$, alors en prenant y tel que $g(y) = x$, on a bien un élément de $\{g(y) : F_{g(X)}(g(y)) \ge \alpha\}$ plus petit (ou égal) à x.
- Sinon, comme, $x > \inf\limits_{\beta\in\mathbb{R}} g(\beta)$, on déduit qu'il existe β tel que

  $$g(\beta) \le x$$

  et par stricte croissance et continuité à gauche, on a $g(g^-(x)) \le x$. Or par définition de $g^-(x)$,

  $$\mathbb{P}(g(g^-(x)) \le g(X) \le x) = 0$$

  Donc $g(g^-(x)) \in \{g(y) : F_{g(X)}(g(y)) \ge \alpha\}$ et $g(g^-(x)) \le x$.

On peut conclure avec ce calcul :

$$\begin{aligned}
g(F_X^-(\alpha)) &= g(\inf\{y : F_X(y) \ge \alpha\}) \\
&= \inf\{g(y) : F_X(y) \ge \alpha\} \text{ (car } \{y : F_X(y) \ge \alpha\} \text{ est un fermé et } g \text{ est croissant)} \\
&= \inf\{g(y) : F_X(g^-(g(y))) \ge \alpha\} \; (g^- \circ g = Id) \\
&= \inf\{g(y) : F_{g(X)}(g(y)) \ge \alpha\} \\
&= \inf\{x : F_{g(X)}(x) \ge \alpha\} \\
&= F_{g(X)}^-(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Cela permet en prenant les fonctions :

$$x \mapsto \lambda x$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$x \mapsto x + t$$

avec $t \in \mathbb{R}$ de montrer le caractère homogène et translatable de la Valeur à Risques.

5.2 Introduction au premier problème

Soit $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs réelles avec sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ et X une variable aléatoire vérifiant certaines propriétés que nous expliciterons plus tard dans le développement. Soit un portefeuille de valeur V_t au temps t. On suppose qu'il existe deux façons de placer son argent :

— un rendement sécurisé qui à l'instant t à la valeur S_t^0 dont l'on possède une quantité H_t^0 (avec S_t^0 un processus)

— un rendement plus risqué qui à l'instant t à la valeur S_t dont l'on possède une quantité H_t (avec S_t un processus)

On suppose que chaque processus est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$. De plus on suppose que $(H_t^0) \in \mathcal{L}^1$ et $(H_t) \in \mathcal{L}^2$.
On a donc $V_t = H_tS_t + H_t^0S_t$ pour tout t dans $[0,1]$. On suppose de plus que le portefeuille est auto-financé (ie il n'y a pas d'ajout ou de retrait d'argent du portefeuille). Cela implique que $dV_t = H_tdS_t + H_t^0dS_t^0$.
On se place dans le cas où $S_t^0 = e^{rt}$ avec $r > 0$ et $S_t = E[T_X(B_1)|\mathcal{F}_t]$ avec T_X une fonction qui assure que $T_X(B_1)$ soit de même loi que X. Le choix de définir (S_t) comme une martingale permet de simuler une situation où l'on connaît l'évolution de la valeur de S_t aux temps précédents. Étudier $E[T_X(B_1)|\mathcal{F}_t]$ permet de modéliser un cas où l'individu découvre la loi de la variable X au fur que le temps passe.
Avec ce que l'on vient de définir, on remarque que V_t est une fonction de $(X,(H_t),(H_t^0))$. On note alors $V_t(X,(H_t),(H_t^0))$.
On veut étudier une mesure de risque. La première idée peut être de vouloir étudier l'espérance, par exemple avec $\underset{H_t,H_t^0}{sup}\, E[V_1]$ mais comme S_t^0 est déterministe et S_t est une martingale (d'espérance constante), l'idée n'est pas très pertinante.
On peut par exemple à la Valeur à Risque (notée VaR) vu dans la partie précédente. Ainsi, dans cet exercice, on travaillera sur la mesure de risque $R(X) = \underset{H_t,H_t^0}{inf}\, VaR(\alpha, V_1(X,H_t,H_t^0))$ avec un α choisi arbitrairement.
L'objectif de ce premier problème est d'abord de trouver des conditions sur X pour rendre l'expression de V_1 plus simple. Ensuite on pourra se demander quelles sont les caractéristiques de la mesure de risques R.

5.3 Résolution du premier problème

<u>Expression de la loi de X selon B_1</u>
Et on note $\mathcal{L}(X)$ la loi de X.
On note donc

$$X \underset{\mathcal{L}}{=} Y$$

si X et Y sont de même loi. Pour la suite de l'exercice, on veut exprimer la loi X comme une fonction de B_1.
On veut donc construire f tel que :

$$f(B_1) \underset{\mathcal{L}}{=} X.$$

La suite justifira que l'on a besoin que cette fonction f soit $\mathbb{C}^1$ et de dérivé bornée. On note F_X la fonction de répartition de X et F_{B_1} la fonction de répartition. Si F_X^{-1} existe,

alors
$$F_X^{-1}(F_{B_1}(B_1)) \underset{\mathcal{L}}{=} X$$

Notons alors $T_X = F_X^{-1} \circ F_{B_1}$.
Pour résumer, il faut que F_X soit inversible et T_X soit $\mathbb{C}^1$ de dérivé bornée.

Soit K un compact et $\epsilon > 0$.
On se place alors dans le cadre où X est une variable de densité f_X continue sur K telle que $f_X > \epsilon$ sur K et $f_X = 0$ sur $\mathbb{R}\backslash K$.
Alors $(F_X)_{|K}$ est une bijection entre K et $[0,1]$ dont la dérivé est bornée et ne s'annule jamais.
Alors $(F_X)_{|K}$ est inversible et l'inversible est $\mathbb{C}^1$ dont la dérivé est borné.
De plus F_{B_1} est $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi T_X vérifie les hypothèses voulues.
Ce sont des contraintes très fortes mais elles permettent d'assurer les conditions voulues.
Dans la suite du problème, nous étudierons la martingale $\mathbb{E}[T_X(B_1)|\mathcal{F}_t]$.

Propriété 5.3.1. *Soit $(H_t^0) \in \mathcal{L}^1$ et $(H_t) \in \mathcal{L}^2$. Alors on a :*
$$V_1(X, H_t, H_t^0) = V_0 + \int_0^1 H_t \mathbb{E}[T'_X(B_1)|\mathcal{F}_t] dB_t + \int_0^1 H_t^0 r e^{rt} dt$$

Démonstration. L'idée est d'exprimer V_1 grâce à la formule de Clark-Okone. On applique donc la fonction à T_X. Cela donne :
$$V_1(X, H_t, H_t^0) = V_0 + \int_0^1 H_t dS_t + \int_0^1 H_0^0 dS_t^0 = V_0 + \int_0^1 H_t \mathbb{E}[T'_X(B_1)|\mathcal{F}_t] dB_t + \int_0^1 H_t^0 r e^{rt} dt$$
□

Caractéristique de la mesure de risques

- Translatable
  Soit $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
  Alors
  $$F_{X+t}(x) = F_X(x-t)$$
  Donc $F_{X+t}^{-1}(x) = F_X^{-1}(x) + t$ et $(F_{X+t}^{-1})'(x) = (F_X^{-1})'(x)$. Donc $T'_X = T'_{X+t}$ et par extension, pour tout $H_t \in \mathcal{L}^2$ et $H_t^0 \in \mathcal{L}^1$, $V_1(X+t, H_t, H_t^0) = V_1(X, H_t, H_t^0)$. Donc
  $$R(X) = R(X+t).$$
  Donc R n'est pas translatable.
- Homogène
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$.
  $F_{\lambda X}(t) = F_X(\frac{t}{\lambda})$ donc $F_{X\lambda}^{-1}(t) = F_X^{-1}(t\lambda)$.
  Alors $(F_{\lambda X}^{-1})'(t) = \lambda (F_X^{-1})'(t)$. Donc
  $$T_{\lambda X} = \lambda T_X$$

On a alors, pour $H_t \in \mathcal{L}^2$ et $H_t^0 \in \mathcal{L}^1$,

$$V_1(\lambda X, H_t, H_t^0) = V_1(X, H_t, H_t^0) = V_0 + \int_0^1 H_t \lambda \mathbb{E}[T'_X(B_1)|\mathcal{F}_t] dB_t + \int_0^1 H_t^0 r e^{rt} dt$$

La formule ci-dessus ne permet pas de conclure, Ici une étude plus poussé et des techniques plus sophistiquées seront nécessaires pour poursuivre.

— Croissance et sous additivité
Pour cela on prend $X > Y$, alors $F_X < F_Y$ avec $X, Y \in \mathbb{F}$. Cependant on ne peut pas comparer F'_X et F'_Y.
Dans le cadre où l'on étudie le problème à partir de la formule de Clark Okone, on ne peut pas conclure.
De même pour $X, Y \in \mathbb{F}$, il n'existe aucun moyen de comparer F_{X+Y} et F_X, F_Y en passant par la formule de Clark-Okone.

Pour conclure On a donc utilisé la formule de Clark-Okone pour calculer V_1 lorsque (H_t) et (H_t^0) sont fixés. A travers ce prisme, nous pouvons pas conclure pour un grand nombre de caractéristique (croissance, homogénéité). Pour poursuivre, il faudrait revenir à la définition de V_1 qui semble plus adapté pour traiter la croissance et la sous-additivité. Il serait aussi pertinant de voir s'il est possible de trouver une méthode pour estimer numériquement $R(X)$.
Le prochain problème sera construit avec des hypothèses plus simple de façon obtenir, en outre, une expression explicite de la mesure de risques.

5.4 Introduction au deuxième problème

Soit un accident du travail qui provoque l'arrêt d'un employé. Chaque jour, l'assurance doit dépenser a euros pour couvrir les frais de son arrêt. Pour la modélisation, on suppose que l'assurance paiera tout à la date où l'employé retourne travailler. Chaque jour, en fonction de la situation de l'employé (toujours en arrêt ou reprise d'activité), l'assurance peut modifier ses investissements. Une fois l'employé rentré, l'assurance ne change plus ses investissements.
Pour modéliser le problème, on considère l'accident comme un évènement ω et $X(\omega)$ comme le jour à partir duquel l'individu retourne au travail. X est donc une variable aléatoire à valeur dans $(\llbracket 1, N \rrbracket)$ suivant la loi Q (supposée connue).
On suppose que l'assurance possède une somme V_0 au moment où l'accident est déclaré et qu'elle peut le dépenser de deux façons :

— investissements courts de rendement $(1 + r_c)$ pouvant à tout instant t être retiré en gardant le gain par rapport à la somme initiale placée

— investissements longs de rendement $(1 + r_l)$ pouvant à tout instant t être retiré mais sans garder le gain par rapport a la somme initiale placée

On précise que $r_l > r_c$ et $V_0 >> aN$.
Par exemple, si l'assurance place tout son argent dans les investissements courts et que l'employé retourne au travail le jour N, elle aura à l'instant N la somme $V_0(1+r_c)^N - aN$.
Dans les mêmes conditions, si elle place tout son argent dans les investissements longs,

elle aura à l'instant N la somme $(V_0 - aN)(1+r_l)^N$.

Comme chaque jour l'entreprise sait si l'assuré n'est plus en arrêt. Il est donc en mesure de changer quotidiennement (donc N fois) la proportion d'investissement court et long de façon à minimiser l'argent perdu à la fin. On peut se mettre dans le cadre où l'on connaît la filtration $\mathcal{G}_k = \sigma(X \leq k, k \in [\![1,n]\!])$ au jour k pour faire le choix de la proportion P_k.

Posons pour $P = (P_1, .., P_{N-1}, P_N) \in [0,1]^N$ les proportions correspondant aux jours $1, .., N$:
On considère V_k^c et V_k^l la valeur des investissements ainsi :

$$V_0^l = V_0, V_0^c = 0$$

et

$$\begin{cases} V_{k+1}^l = (1 - P_{k+1})V_k^l \\ V_{k+1}^c = V_k^c + V_k^l P_{k+1} \end{cases}$$

On note $V_n^{P_1,..,P_n}(X)$ la valeur du portefeuille à l'instant n suite aux choix des $(P_1, .., P_n) \in [0,1]^n$.
On précise que $V_k(X) \neq V_k^c + V_k^l$, en effet V_n peut comprendre l'argent dépensé pour assurer l'employé.

Exemple :
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.
Soit $(P_1, ..P_k) \in [0,1]^k$ les choix des proportions tel que $V_k^c = x$ et $V_k^l = y$.
Si $X = k$, alors $V_k(X) = (xc - ak)_+(y - (ak - V_k^c)_+)(1+r_l)^k$
et $V_k(X) = (x - ak)_+(1+r_c)^{N-k}(y - (ak - V_k^c)_+)(1+r_l)^N$

On pose alors la mesure de risque :

$$R(X) = \underset{p \in [0,1]^N}{sup} \mathbb{E}[V_N^P(X)]$$

La problématique est d'abord d'obtenir le N-uplet optimal, puis de regarder les influences de la loi de X sur R. Ensuite il peut être intéressant d'appliquer la méthode numériquement. A terme, l'intérêt est de savoir mesurer le risque d'un accident et de savoir comment optimiser son portefeuille en fonction.

5.5 Résolution du deuxième problème

Définition 16. *Soit $k \in [\![0,N]\!]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. On pose*

$$U(k,x,y) = \underset{p \in [0,1]^{N-k}}{sup} \mathbb{E}_{V_k^c = x, V_k^l = y}[V_N^p(X) | X > k].$$

Ici on prend $p \in [0,1]^{N-k}$ car l'information des k premières proportions est déjà contenue dans la valeur V_k^c et V_k^l.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [\![0,N]\!]$. L'énoncé nous assure que pour $P \in [0,1]^N$ tel que $V_k^c = x$ et $V_k^l = y$. Alors :

$$\mathbb{E}_{V_k^c=x,V_k^l=y}[V_N^P(X)|X=k] = (x-ak)_+(1+r_c)^{N-k} + (y-(ak-x)_+)(1+r_l)^N$$

On a aussi par définition :

$$\underset{p\in[0,1]^N}{sup}\ \mathbb{E}[V_N^p(X)] = U(0,0,V_0)$$

On remarque aussi que le sup est atteint en un $N-uplet$ de $[0,1]$.
En effet,

- Pour tout $p \in [0,1]^N$, $\mathbb{E}(V^p|X>k] < \infty$,
- V^p est continue en $p \in [0,1]^N$,
- Pour tout $p \in [0,1]^N$, V^p est borné par $V_0(1+r_l)^N$.

Le théorème de convergence dominé nous permet de conclure que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$,

$$p \mapsto \mathbb{E}[V^p|X>k]$$

est continu. Donc pour la suite, on parlera d'un maximum.

Propriété 5.5.1. *Soit* $k \in [\![0,N-1]\!]$,

$$\begin{aligned}U(k,x,y) = \underset{p\in[0,1]}{max}[(&\mathbb{P}(X=k+1|X>k)[(x+py)(1+r_c)-a(k+1))_+(1+r_c)^{N-k-1}\\&+(y(1-p)-(a(k+1)-(x+py)(1+r_c))_-)(1+r_l)^N]\\&+\mathbb{P}(X>k+1|X>k)U(k+1,(x+py)(1+r_c),y(1-p))].\end{aligned}$$

Et

$$U(N,x,y)=0.$$

Démonstration. Soit $k \in [\![0,N]\!]$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}U(k,x,y) &= \underset{p_{k+1},..,p_N}{max}\ \mathbb{E}_{V_k^c=x,V_k^l=y}[V_N^{p_{k+1},..,p_N}(X)|X>k]\\&= \underset{p_{k+1}}{max}\ \underset{(p_{k+2},..,p_N)}{max}\ \mathbb{E}_{V_k^c=x,V_k^l=y}[V_N^{p_{k+1},..,p_N}(X)|X>k]\\&= \underset{p_{k+1}}{max}\ \underset{(p_{k+2},..,p_N)}{max}[\mathbb{E}_{V_k^c=x,V_k^l=y}[V_N^{p_{k+1},..,p_N}(X)|X>k+1]\mathbb{P}(X>k+1|X>k)\\&+\mathbb{E}_{V_k^c=x,V_k^l=y}[V_N^{p_{k+1},..,p_N}(X)|X=k+1]\mathbb{P}(X=k+1|X>k)]\ \text{(formule des espérance totale)}\\&= \underset{p_{k+1}}{max}[\underset{(p_{k+2},..,p_N)}{max}(\mathbb{E}_{V_{k+1}^c=x+yp_{k+1},V_{k+1}^l=(1-p_{k+1})y}[V_N^{p_{k+2},..,p_N}(X)|X>k+1]]\mathbb{P}(X>k+1|X>k))\\&+\mathbb{E}_{V_{k+1}^c=x+yp_{k+1},V_{k+1}^l=(1-p_{k+1})y}[V_N^{p_{k+1}}(X)|X=k+1]\mathbb{P}(X=k+1|X>k)]]\ \text{(comme justifié}\\&\text{précédemment, le deuxième terme ne dépends que de } p_{k+1})\\&= \underset{p_{k+1}}{max}[U(k+1,x,y)\mathbb{P}(X>k+1|X>k)\\&+[(\mathbb{P}(X=k+1|X>k)[(x+py)(1+r_c)-a(k+1))_+(1+r_c)^{N-k-1}\\&+(y(1-p)-(a(k+1)-(x+py)(1+r_c))_+)(1+r_l)^N]\end{aligned}$$

$$U(N,x,y) = \mathbb{E}_{V_N^c=x,V_N^l=y}[V_N|X>N] = 0$$

□

Cette méthode dynamique est centrale pour l'étude de la mesure de risque. Elle permet de résoudre le problème numériquement. L'annexe comporte un programme python permettant d'approcher numériquement la solution (cf annexe).
On prend a=10. Les arguments de Esp (la fonction R) sont (dans l'ordre) :

— les deux premiers arguments 0 (cela permet l'initialisation),

— la borne N,,

— la variable X,

— la valeur d'investissement court à l'instant 0,

— la valeur d'investissement long à l'instant 0,

— r_c,

— r_l.

```
Entrée [17]: X=[[1,2],[1,0]]
             Esp(0,2,X,0,50,0.5,2)

    Out[17]: 389.9549549549549
```

FIGURE 1 – Cas où X a pour loi $\mathbb{P}(X=1)=1$ et $\mathbb{P}(X=2)=0$

Ici on peut vérifier numériquement la validité du résultat. Le résultat théorique étant 390, on vérifie que le résultat est cohérent.
L'algorithme naïf, à cause du calcul de maximum à chaque étape de la récurrence, a une complexité exponentielle. Je n'ai pas eu le temps de proposé une version amélioré. On peut cependant regarder le résultat pour de petit N :

```
Entrée [15]: X=[[1,2,3],[0.2,0.4,0.4]]
             Esp(0,3,X,0,50,0.5,2)

    Out[15]: 1108.974517906336
```

FIGURE 2 – Cas où X a pour loi $\mathbb{P}(X=1)=0,2$, $\mathbb{P}(X=2)=0,4$, $\mathbb{P}(X=3)=0,4$

On peut maintenant s'intéresser à :

$$R(X) = U_X(0,0,V_0) = \underset{p\in[0,1]^N}{max} \mathbb{E}[V^p(X)]$$

— <u>Décroissance</u>
Soit X et Y des variables aléatoires telles que $X < Y$ presque sûrement, alors il existe un $p_Y \in [0,1]^N$ qui maximise $\mathbb{E}[V^p(Y)]$.
On ne peut pas dire que pour $\omega \in \Omega$:

$$V^{p_y}(Y)(\omega) \leq V^{p_y}(X)(\omega).$$

En effet, la proportion p_Y peut être à l'origine de cas atypique où pour certain ω, on ait l'égalité inverse. Idéalement, on voudrait trouver p'_y tel que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$V^{p_y}(Y)(\omega) \leq V^{p'_y}(X)(\omega).$$

Alors on aurait

$$R(Y) = \mathbb{E}[V^{p_y}(Y)] \leq \mathbb{E}[V^{p'_y}(X)] \leq \max_{p\in[0,1]^N} \mathbb{E}[V^p(X)] = R(X)$$

Pour l'instant, nous n'avons pas de démonstration complète pour la décroissance.

— <u>Translatable</u>

On va avoir de préciser sur la fonction U la dépendance en X et N : Pour $X \in \mathbb{F}$ et $N \in \mathbb{N}$ le dernier jour où l'employé peut rentrer, on note $U(k,x,y) = U_X^N(k,x,y)$. On se place dans le cas où $\sup(X+1) \leq N$. On peut alors faire le calcul pour voir si une forme de simplification se dégage :

$$U_{X+1}(0,x,y) = \max_{p_1} U_{X+1}(1,(x+py)(1+r_c),(1-p)y)$$
$$= \max_{p_1,p_2} P(X+1=2|X+1>1)[[((x+p_1y)(1+r_c)+p_2(1-p_1)y)(1+r_c)-2a]^+(1+r_c)^{N-2}$$
$$+[y(1-p_1)(1-p_2)-[((x+p_1y)(1+r_c)+p_2(1-p_1)y)(1+r_c)-2a]^-](1+r_l)^N]$$
$$+P(X+1>2|X+1>1)U_{X+1}(3,((x+p_1y)(1+r_c)+p_2(1-p_1)y)(1+r_c),y(1-p_1)(1-p_2)).$$

On veut montrer que $p_{2_{max}} = 0$.
L'idée de la démonstration est de montrer que pour tout (p_1,p_2), il existe $p'_1 \in [0,1]$ tel que $V_l^{p_1,p_2} = V_l^{p'_1,0}$ et $V_c^{p_1,p_2} \leq V_c^{p'_1,0}$.
Ainsi on réduira l'expression posé plus haut au calcul d'un seul maximum.
Pour (p_{max_1}, p_{max_2}), on a $V^{p_{max_1},p_{max_2}} \leq V^{p',0} \leq V^{p_{max_1},p_{max_2}}$. Donc $V^{p',0} = V^{p_{max_1},p_{max_2}}$.
On se réduira alors au maximum sur p_1.

Démonstration. On s'impose donc que V_l soit constant. Cela revient à s'imposer, pour $c \in \mathbb{R}^+$, que

$$y(1-p_1)(1-p_2) = c$$

Donc

$$p_1(p_2) = 1 - \frac{a}{y(1-p_1)}$$

On cherche alors à maximiser V_c :

$$max_{p_2}[(x+yp_1(p_2))(1+r_c)+y(1-p_1(p_2))p_2](1+r_c) = max_{p_2}(x(1+r_c)+1-c-\frac{cr_c}{1-p_2})(1+r_c)$$

qui est décroissant en p_2.
Donc maximal en $p_2 = 0$ □

On réécrit alors $U_{X+1}(0,0,V_0)$:

$$U_{X+1}^N(0,0,V_0) = \max_p \mathbb{P}(X=1|X>0)[(py(1+r_c)^2-2a)_+(1+r_c)^{N-2}]$$
$$+(V_0(1-p)-(2a-py(1+r_c)^2)_+)(1+r_l)^N]$$
$$+\mathbb{P}(X>1|X>0)U_{X+1}(3,py(1+r_c)^2,V_0(1-p))$$

Pour montrer une forme intéressante, on aimerait avoir de cette nature :
$U^N_{X+1}(0,0,y) = U^{N-1}_X(0,0,y(1+r_c)) - a \times cst$ avec $cst \in \mathbb{R}$.
Seulement il semble compliqué d'imaginer à obtenir car pour sortir a, il faudrait connaître le p qui maximise U. On ne peut donc pas conclure avec ce qui a était trouvé pour le moment.

Pour conclure on a trouvé une méthode pour exprimer explicitement $R(X)$. Cependant les caractéristiques, comme la décroissances, qui semblaient assez naturelles ne sont en réalité non trivial. Pour poursuivre, il serait pertinent de chercher à comprendre les mécaniques de choix des proportions optimales. Par exemple il pourrait être intéressant de savoir encadrer chaque proportions pour montrer la croissance de R.

6 Conclusion

Durant ce stage, j'ai pu m'initier aux mathématiques financières et au monde de la recherche.
La première partie du stage était dédiée à la compréhension des concepts du calcul stochastique. Elle a permis de réutiliser les cours suivis durant l'année pour les appliquer dans un nouveau domaine. Ces connaissances permettent aussi d'envisager non seulement les problèmes étudiés durant mon stage, mais aussi des problèmes plus complexes.
La seconde partie du stage a été dédiée à la résolution de problèmes en lien avec la notion de mesure de risques. Le premier problème ne présente pas les résultats attendus et sa modélisation rend, pour mon niveau, les manipulations compliquées. Le deuxième problème, plus simple dans sa modélisation, permet des calculs plus explicites et une résolution numérique. Cependant nous (moi et mes maîtres de stage) n'avons pas encore trouvé de solutions pour des résultats semblant pourtant naturels. Ce problème n'est pas encore achevé et nous continuons de chercher.

Finalement, le stage m'a permis de découvrir le travail d'un chercheur. J'ai réalisé à quel point la persévérance, la rigueur et la patience sont essentielles dans la recherche. Les problèmes ayant été traités avec l'aide de mes maîtres de stage, j'ai saisi l'importance de la communication entre chercheurs. Elle permet aussi bien d'avancer que de corriger les potentielles erreurs.
Je tiens donc à remercier Brice Franke et Catherine Rainer pour le temps accordé, la relecture et la direction dans mes travaux.

7 Annexe

```
a=10
def positif(x):
    if x>0:
        return x
    else :
        return 0
```

```
def negatif(x):
    if x<0 :
        return x
    else :
        return 0
```

On représente la variable X comme une de deux listes de même taille. La première liste l1 correspond aux valeurs possibles pour X. La deuxième liste l2 correspond aux probabilités des évènements l1. Ainsi, l1[i] a pour probabilité l2[i].

```
def varDis(N):
```

Génére une variable aléatoire à valeur dans [1,N]

```
    X=[i+1 for i in range(N)]
    p=[0 for i in range(N)]
    for i in range(N-1):
        r=random.random()
        pr=0
        for j in range(i):
            pr=pr+p[j]
        p[i]=r*(1-pr)
    pr=0
    for i in range(N-1):
        pr=pr+p[i]
    p[N-1]=1-pr
    return([X,p])
```

```
def probcon(L,A):
```

A est une liste de valeur de [1,N] qui correspondent à l'événement A.

```
    L=[l1,l2] est la variable.
    nL=[[],[]]
    p=0
    for i in range(len(L[0])):
        if L[0][i] in A:
            nL[0]=nL[0]+[L[0][i]]
            nL[1]=nL[1]+[L[1][i]]
            p=p+L[1][i]
    if p==0:
        return nL
    else :
        for i in range(len(nL[1])):
            nL[1][i]=nL[1][i]/p
    return nL
```

```
def f(p,n,N,X,x,y,rc,rl):
    prob=probcon(X,[i for i in range(n+1,N+1)])[1][0]
    Vc=positif((x+p*y)*(1+rc)-a*(n+1))
    Vl=y*(1-p)-positif(a*(n+1)-(x+p*y)*(1+rc))
```

```
    S =prob*(Vc*(1+rc)**(N-n-1)+Vl*(1+rl)**N)+(1-prob)*Esp(n+1,N,probcon(X,
    print(S)
    return (S)

def maximun(f,n,N,X,x,y,rc,rl):
    T=[]
    for p in np.linspace(0,1,100):
        T.append(f(p,n,N,X,x,y,rc,rl))
    return(max(T))


def Esp(n,N,X,x,y,rc,rl):
    if n==N:
        return 0
    else :
        return (maximun(f,n,N,X,x,y,rc,rl))
```

8 Réference

- Livres :
  - Gallardo, Léonard. 2008. Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corriges. Paris : Hermann.
  - J. Michael Steele : Stochastic calculus and financial applications.
- Polycopiés en ligne :
  - J.F. Le Gall. Calcul stochastique et processus de Markov. Cours de M2R, 2010-2011.
  - Peter Tankov, Nizar Touzi : Stochastic Calculus in Finance, Ecole Polytechnique (à trouver sur la page web de Nizar Touzi)
  - Charles Suquet, Martingales (à trouver sur le site de Charles Suquet)
- Polycopiés papier :
  - Catherine Rainer : Cours de martingales en temps continue.
  - Catherine Rainer : Cours EURIA-Master 1
  - Brice Frank : "Cours sur les Mesures de Risques"