Théorème de représentation de Riesz

2012-2013

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Théorème.
Soit f une forme linéaire continue sur H, alors il existe un unique $y \in H$ tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = \langle y \mid x \rangle$$

Démonstration. $F := \ker f$ est fermé car f est continue.

- Existence : Si $F^\perp = \{0\}$, alors $(F^\perp)^\perp = F = H$ donc $f = 0$ et on prend $y = 0$.
  Sinon, soit $w \in F^\perp$ tel que $\|w\| = 1$.
  On a $f(w) \neq 0$ et pour $x \in H$,
  $$x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in \ker f = F$$
  Donc :
  $$\langle w \mid x - \frac{f(x)}{f(w)} w \rangle = 0$$
  D'où, pour $x \in H$,
  $$f(x) = f(x)\langle w \mid w \rangle = f(w)\langle w \mid x \rangle = \langle y \mid x \rangle$$
  en posant $y = \overline{f(w)} w$.
- Unicité : Soit $y_1, y_2 \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\langle y_1 \mid x \rangle = f(x) = \langle y_2 \mid x \rangle$. Alors en prenant $x = y_1 - y_2$, on obtient $\langle y_1 - y_2 \mid y_1 - y_2 \rangle = 0$, d'où $y_1 = y_2$.

$\square$