Lemme de Riemann-Lebesgue

2012-2013

Référence : Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation (3e édition)*, Dunod, 2007, p.73.

Lemme.
Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
Soit $f \in L^1([a, b])$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\begin{aligned}\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{dt} &= \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{dt} \\ &= \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que la première limite est nulle.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls telle que $|\lambda_n| \to \infty$.
On définit $(l_n)_{n\geq 1}$ des formes linéaires sur $L^1([a, b])$ par :

$$l_n(g) = \int_a^b g(t)e^{i\lambda_n t}\mathrm{dt}$$

Alors :

$$|l_n(g)| \leq \int_a^b |g(t)|\mathrm{dt} = \|g\|_1$$

Donc $\|l_n\| \leq 1$.
Pour $I := [u, v] \subset [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned}l_n(\mathbb{1}_I) &= \int_u^v e^{i\lambda_n t}\mathrm{dt} \\ &= \frac{e^{i\lambda_n v} - e^{i\lambda_n u}}{i\lambda_n}\end{aligned}$$

Donc :

$$|l_n(\mathbb{1}_I)| \leq \frac{2}{|\lambda_n|} \text{ et } l_n(\mathbb{1}_I) \to \infty$$

Or les $\mathbb{1}_I$ forment une partie totale de $L^1([a,b])$ et $\sup\limits_{n\geq 1}\|l_n\| \leq 1 < \infty$, donc d'après le lemme suivant, $l_n(g) \to \infty \ \forall g \in L^1([a,b])$. $\square$

Lemme.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* B *une partie totale de* E*, où* E *et* F *sont des espaces de Banach.*
Il y a équivalence entre :

(i) $\forall b \in B, T_n(b) \to T(b)$ *et* $\sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\| < \infty$

(ii) $\forall x \in E, T_n(x) \to T(x)$

Démonstration.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\forall x \in E$, $\|T_n(x)\|$ est borné donc par Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\| < \infty$.
$(i) \Rightarrow (ii)$: $\forall x \in \text{vect } B, T_n(x) \to T(x)$.
Soit $x \in E, \varepsilon > 0$, alors il existe $y \in \text{vect } B$ tel que $\|x-y\| < \varepsilon$.
Alors, en posant $C := \sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\|$, on a :

$$\begin{aligned}\|T_n(x)-T(x)\| &\leq \|T_n(x)-T_n(y)\| + \|T_n(y)-T(y)\| + \|T(y)-T(x)\| \\ &\leq 2C\|x-y\| + \|T_n(y)-T(y)\| \\ &\leq 2C\varepsilon + \|T_n(y)-T(y)\|\end{aligned}$$

D'où :

$$\limsup_{n\to\infty}\|T_n(x)-T(x)\| = 0$$

$\square$