Théorème de Riesz-Fischer

Léo Daures

Leçons 201, 205, 223, 234, 235, 241

1 Le Théorème de Riesz-Fischer

Théorème 1. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors l'espace $(L^p(\mathbb{K}), ||\cdot||_p)$ est complet. De plus, si une suite $(f_n) \in L^p_\mu(\mathbb{K})^{\ltimes}$ converge vers $f \in L^p_\mu(\mathbb{K})$ en norme p, alors à sous suite près elle est dominée par une fonction $g \in L^p_\mu(\mathbb{K})$ et converge presque partout vers f.*

2 Démonstration

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p_\mu(\mathbb{K})$. L'objectif est de lui trouver une limite au sens de la convergence L^p. En fait, on va d'abord lui chercher une limite au sens de la convergence presque-partout, et montrer ensuite qu'elle converge en norme p vers cette fonction.

Si la limite presque partout de (f_n) existait, on pourrait l'écrire sous la forme $f_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$ (par téléscopage). Malheureusement rien n'indique que cette série de fonction converge, même seulement presque partout. Par contre, en utilisant la propriété de Cauchy de (f_n), on peut arriver à faire converger absoluement une série similaire.

On extrait une sous suite pour arriver à faire converger la série téléscopique. Soit φ une extraction définie par :

- $\varphi(0) = 0$
- $\forall n \geqslant 1, \varphi(n) = \min\{k > \varphi(n-1) \mid \forall q, r \geqslant k, ||fq - f_r||_p \leqslant 2^{-n}\}$ (cette partie de $\mathbb{N}$ est non vide par propriété de Cauchy de (f_n) donc elle a bien un minimum.)

L'extractrice φ est définie de telle sorte que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \geqslant n\ ||f_{\varphi(n)} - f_q||_p \leqslant 2^{-n}$ et en particulier $||f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n+1)}||_p \leqslant 2^{-n}$. Donc, la série $\sum ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}||_p$ converge dans $\mathbb{K}$. Utilisons cette propriété pour faire converger presque partout la série de fonctions $\sum |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|$. Il suffit de montrer que $g := \sum_{n=0}^{\infty} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|$ est finie presque partout. Pour cela, montrons que $||g||_p < +\infty$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$|| \sum_{n=1}^{N} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\ ||_p^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}||_p \right)^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \right)^p \leqslant 1$$

Or, comme la suite des sommes partielles est croissante, par le lemme de Beppo Levi,

$$1 \geqslant || \sum_{n=1}^{N} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|\ ||_p^p = \int_{\mathbb{K}} \sum_{n=1}^{N} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|^p \mathrm{d}\mu \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} \int_{\mathbb{K}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|^p \mathrm{d}\mu = ||g||_p^p$$

Donc $||g||_p \leqslant 1 < \infty$ et donc g est finie presque partout. Comme $\mathbb{K}$ est complet, l'absolue convergence d'une série réelle implique la convergence de cette série, donc on a la convergence pour presque tout x de $\sum(f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x))$, autrement dit, puisque $\sum_{n=1}^{N}(f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) = f_{\varphi(N+1)}(x) - f_{\varphi(1)}(x)$, on a la convergence pour presque tout x de $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On a l'audace d'appeler la limite de cette suite de réels $f(x)$:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)) + f_{\varphi(1)} = \lim_{n\mathbb{K}ightarrow\infty} f_{\varphi(n)}(x)$$

Ainsi, grâce à l'exploitation de la complétude de $\mathbb{K}$, on a trouvé un candidat sérieux au rôle de limite de la suite (f_n) : la fonction f définie presque partout est déjà limite presque partout de $(f_{\varphi(n)})$. On veut montrer qu'elle fait mieux : f doit être limite au sens L^p de (f_n). Commençons par montrer qu'elle est limite au sens L^p de $(f_{\varphi(n)})$.

Par le lemme de Fatou, on a :

$$\int_{\mathbb{K}} \liminf_q |f_{\varphi(q)}(x) - f_{\varphi(r)}(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \;\leqslant\; \liminf_q \int_{\mathbb{K}} |f_{\varphi(q)}(x) - f_{\varphi(r)}(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)$$

Or, dans le terme de gauche, comme $f_{\varphi(q)}(x)$ converge presque partout vers f, la limite inférieure est une limite et vaut presque partout $|f(x) - f_{\varphi(r)}(x)|^p$. Le terme de droite quant à lui peut être réécrit $\liminf_q ||f_{\varphi(q)} - f_{\varphi(r)}||_p^p$ et est donc majoré par $(2^{-r})^p$. On aboutit alors à l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{K}} |f(x) - f_{\varphi(r)}(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant 2^{-pr}$$

Autrement dit,

$$||f - f_{\varphi(r)}||_p^p \leqslant 2^{-rp}$$

La norme p de $f - f_{\varphi(r)}$ est majorée par 2^{-r}. Donc fatalement, f est limite L^p de $(f_{\varphi(r)})$. Il ne reste plus qu'à montrer que (f_n) elle-même converge vers f. C'est le cas car une suite de Cauchy admettant une valeur d'adherence converge toujours vers cette valeur d'adhérence.