Théorème de Fischer–Riesz

Arnaud Girand

11 décembre 2011

Référence :
- [Bre05], p. 57–58

Leçons :
- 201 - Espaces de fonctions : exemples et applications.
- 205 - Espaces complets. Exemples et applications.
- 234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.
- 235 - Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

Prérequis :
- théorème de Beppo–Levi.

Proposition 1 (Fischer–Riesz)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.
Soit $p \in [1, \infty]$.
Alors :
(i) $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach ;
(ii) de toute suite convergente dans $L^p(\Omega)$ on peut extraire une suite convergeant presque partout sur Ω.

Démonstration :
- *Cas $p = \infty$.* Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Alors $\forall k \geq 1$, $\exists N_k \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N_k,\, \forall q \geq 0,\, \|f_{n+q} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

De fait il existe un ensemble négligeable $E_k \subset \Omega$ tel que :

$$\forall n \geq N_k,\, \forall q \geq 0,\, \forall x \notin E_k,\, |f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{1}$$

Ainsi, pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble négligeable $E := \cup_k E_k$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel $f(x)$. De plus, en faisant tendre q vers l'infini dans (1) on obtient :

$$\forall x \notin E,\, \forall n \geq N_k,\, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

De fait, la fonction f ainsi définie[1] est dans L^∞ (ce qui prouve le point (ii) étant donné que toute suite convergente est de Cauchy) et $\forall n \geq N_k$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, ce qui signifie que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty} f$, ce qui prouve le point (i).
- *Cas $p < \infty$.* Soit $(f_n)_n)$ une suite de Cauchy dans L^p. Comme toute de suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge, il nous suffit d'extraire de cette dernière une suite convergente pour prouver le point (i). Commençons par remarquer que :

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante telle que } \forall n \geq 1,\, \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

On pose ensuite, pour $n \geq 0$:

$$g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$$

1. Comme on travaille dans un espace L on peut (doit !) se contenter de la définir presque partout.

Alors $g_n \in L^p(\Omega)$ (comme somme de fonctions L^p) et par inégalité triangulaire :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

De fait la suite de fonctions $(g_n)_n$ est croissante et bornée en norme L^p donc par théorème de Beppo–Levi, il existe $g \in L^p(\Omega)$ tel que $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ presque partout. Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$ on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2, \forall q \geq 0,\ |f_{\varphi(n+q)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| &= \left| f_{\varphi(n+q)}(x) - \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) + \sum_{k=1}^{q-1} f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n)}(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{q} |f_{\varphi(n+k)}(x) - f_{\varphi(n+k-1)}(x)| \\
&= g_{n+q}(x) - g_{n-1}(x) \\
&\leq g(x) - g_{n-1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ainsi (la majoration étant indépendante de q) la suite $(f_\varphi(n))_x$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel $f(x)$. Comme pour presque tout $x \in \Omega$ on a $|f(x) - f_\varphi(n)(x)| \leq g(x)$ $(n \geq 2)$ la fonction f ainsi définie est bien dans L^p, ce qui au passage prouve le point (ii) car toute suite convergente est de Cauchy.
In fine les $f_{\varphi(n)}$ sont dans L^p, convergent presque partout vers $f \in L^p$ et subissent l'intenable domination $|f_{\varphi(n)(x)}| \leq |f(x)| + |g(x)|$ (avec $|f| + |g| \in L^p$) presque partout. Vous l'aurez deviné, notre salut va provenir du théorème de convergence dominée qui nous permet de conclure que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f$.
La suite de Cauchy $(f_n)_n$ admet donc une valeur d'adhérence f dans $L^p(\Omega)$ donc converge vers cette dernière, ce qui prouve le point (i) et achève le théorème (tout du moins sa preuve).

Détails supplémentaires :

- On peut ajouter au point (ii) que la sous–suite en question est dominée par $h \in L^p$. En effet, il suffit de poser $h = |f| + |g|$ (dans le cas $p < \infty$) ou $h = 1 + |f|$ (dans le cas $p = \infty$).
- *Démonstration du point* (2). Construisons φ par récurrence. Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N_1 \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N_1,\ \forall q \geq 0,\ \|f_{n+q} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}$$

On pose $\varphi(1) := N_1$.
Supposons à présent φ construite jusqu'au rang $n \geq 1$. Alors, toujours comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe N_{n+1} tel que :

$$\forall n \geq N_{n+1},\ \forall q \geq 0,\ \|f_{n+q} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Quitte à aller un peu plus loin que prévu, on peut supposer $N_{n+1} > \varphi(n)$ et il nous suffit alors de poser $\varphi(n+1) := N_{n+1}$ pour conclure.

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionelle.* Dunod, 2005.