Séries entières avec coupure p.s.

Gregory Boil Tristan Haugomat

Année 2013-2014

Ce développement ce trouve dans [QZ13] dans le chapitre *Théorèmes limites en Probabilité. Applications à l'Analyse*, section *Application des Probabilités à l'Analyse*, sous section *Séries entières avec coupure.* On appelle $\mathcal{U}(\mathbb{U})$ la loi uniforme sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, c'est par exemple la loi de $e^{i\Theta}$ avec $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$. On ce propose de démontrer le théorème

Théorème (Séries entières avec coupure p.s.). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série de rayon de convergence 1. Soient $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\mathbb{U})$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors*

$$\text{p.s., } \forall a \in \mathbb{U}, \ a \text{ est un point singulier de } f(z) := \sum_{n\geq 0} Z_n a_n z^n.$$

Résultats requis

On va avoir besoin des résultats suivants

Théorème 1 (Loi du 0-1 de Kolmogorov). *Soit $(\mathcal{A}_n)_n$ une suite de tribus mutuellement indépendante, alors tout élément le la tribu asymptotique $\mathcal{A}_\infty := \bigcap_{n\geq 0} \bigvee_{k\geq n} \mathcal{A}_k$ est de probabilité 0 ou 1.*

Lemme 2 ([QZ13] chapitre III section IV). *Toute série entière de rayon de convergence fini admet un point singulier.*

Lemme 3 ([QZ13] chapitre III section IV). *Soit f une série entière en 0 de rayon de convergence 1 et soit $u \in \mathbb{U}$. Alors u est régulier si et seulement si la série entière induit par f et de centre $\frac{u}{2}$ a un rayon de convergence strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, i.e.*

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}\left(\frac{u}{2}\right)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < 2.$$

Étude de $A_u := \{\omega \in \Omega \mid u$ est un point régulier de $f_\omega\}$ pour $u \in \mathbb{U}$

On va utiliser la caractérisation de la régularité de u donné par le Lemme 3. Soit $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_n)$ et $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\geq 0} \bigvee_{k\geq n} \mathcal{F}_k$. On a que

$$f^{(k)}\left(\frac{u}{2}\right) = \sum_{i\geq k} Z_i a_i \frac{i!}{(i-k)!} \left(\frac{u}{2}\right)^{i-k}$$

est $\bigvee_{i\geq k} \mathcal{F}_k$-mesurable. Ainsi $sup_{k\geq n} \left| \frac{f^{(k)}\left(\frac{u}{2}\right)}{k!} \right|^{\frac{1}{k}}$ est $\bigvee_{k\geq n} \mathcal{F}_k$-mesurable et $\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}\left(\frac{u}{2}\right)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}$ est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Ainsi

$$A_u \in \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$$

et par la loi du 0-1 (Théorème 1) $\mathbb{P}(A_u) \in \{0, 1\}$. Enfin, u est un point régulier de $\sum_{n\geq 0} Z_n a_n z^n$ si et seulement si 1 est un point régulier de $\sum_{n\geq 0} (u^n Z_n) a_n z^n$ or $(Z_n)_{n\geq 0}$ et $(u^n Z_n)_{n\geq 0}$ on la même loi, donc

$$\mathbb{P}(A_u) = \mathbb{P}(A_1).$$

Preuve du théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dense de $\mathbb{U}$, alors comme l'ensemble des points régulier est un ouvert de $\mathbb{U}$ on a

$$\{\forall u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f\} = \{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un point régulier de } f\} \in \mathcal{F}_\infty,$$
$$\{\exists u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f\} = \{\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un point régulier de } f\} \in \mathcal{F}_\infty.$$

Ainsi en utilisant que pour tout $u \in \mathbb{U}$, $\mathbb{P}(A_u) = \mathbb{P}(A_1) \in \{0, 1\}$ on a

$$\mathbb{P}(\forall u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f) = \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un point régulier de } f) = \mathbb{P}(A_1)$$
$$\mathbb{P}(\exists u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f) = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un point régulier de } f) = \mathbb{P}(A_1)$$

Ainsi comme toute série entière de rayon de convergence 1 possède un point régulier (Lemme 2), on conclu

$$\mathbb{P}(\exists u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f) = \mathbb{P}(\forall u \in \mathbb{U},\ u \text{ est un point régulier de } f) = 0$$

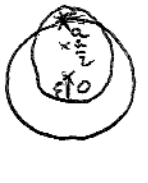
Références

[QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation-4e éd.* Dunod, 2013.

Idée du Lemme 2

Si tout Pont du cercle de cvg est régulier, Alors $\forall u \in \mathbb{U}$ il existe un disque de centre u sur lequelle la ~~[scratched]~~ fonction est prolongable. Par compacité on se ramène un un nb fini de disques $D_1, \dots, D_n$ sur lesquelles la fction est prolongable ~~[scratched]~~ tq les D_i recouvrent le cercle de convergence. Par prolongement analytique, la fonction est prolongable sur $\bigcup_i D_i$, Donc sur un disque $D(0, 1+\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$, donc le rayon de cvg est $\geq 1+\varepsilon$, impossible.

Idée du lemme 3 :



Par un jeu sur les voisinages, la série entière est prolongable en a ssi elle est prolongable sur un disque de centre $\frac{a}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}+\varepsilon$, ceci est équivalent à ce que la série entière induite en $\frac{a}{2}$ soit de rayon de cvg $> \frac{1}{2}$.