Solution élémentaire de l'equation de Schrodinger

12 avril 2012

Sera Admis pour la fin du calcul : La valeur de l'intégrale de Fresnel est : $\int_{\mathbb{R}} e^{ix^2} = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$.

Theoreme 1. *Il existe une solution élémentaire à l'opérateur de Schrodinger $\partial_t - i\Delta_x$, donnée par la distribution tempérée E : $\forall \phi \in S(\mathbb{R}^{n+1})$,*

$$< E, \phi >= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{\frac{-in\pi}{4}}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t,x) e^{i\|x\|^2/4t} dx \right) dt$$

Démonstration. On cherche une solution à support dans $t \geq 0$. On va raisonner par analyse-synthèse. Supposons que E soit une telle solution élémentaire. On a :

$$\partial_t E - i\Delta_x E = \delta_0$$

On applique à cette équation la transformée de Fourier partielle par rapport à x. On obtient :

$$\partial_t \tilde{E} + i\|\xi\|^2 \tilde{E} = \tilde{\delta_0}$$

où $\tilde{\delta_0}$ est la distribution vérifiant :

$$< \tilde{\delta_0}, \varphi >=< \delta_0, \tilde{\varphi} >= \tilde{\varphi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x) dx$$

Pour $t \neq 0$, on veut donc $\partial_t \tilde{E} + i\|\xi\|^2 \tilde{E} = 0$. Posons alors :

$$\tilde{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-i\|\xi\|^2 t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et vérifions que ce $\tilde{E}$ convienne.
On a, pour $\phi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} < \partial_t \tilde{E} + i\|\xi\|^2 \tilde{E}, \varphi > &= < \tilde{E}, -\partial_t \varphi + i\|\xi\|^2 \varphi > \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[} e^{-it\|\xi\|^2} \left(-\partial_t \varphi + i\|\xi\|^2 \varphi \right) dt d\xi \end{aligned}$$

On fait une intégration par parties sur la variable t avec le premier membre (en ∂_t), ce qui annule le second terme et on obtient :

$$\begin{aligned} < \partial_t \tilde{E} + i\|\xi\|^2 \tilde{E}, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[-e^{it\|\xi\|^2 t} \varphi(t,\xi) \right]_{t=0}^{t \to +\infty} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,\xi) d\xi \\ &= < \tilde{\delta_0}, \varphi > \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé un E qui convenait, quite à appliquer la transformée de Fourier inverse. Nous allons maintenant expliciter cette distribution E. Nous aurons besoin pour cela d'un petit lemme :

lemme 1. *Posons $G(x) = e^{\frac{i\|x\|^2}{2}}$. Alors*

$$\hat{G}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^n e^{in\pi/4} e^{-\frac{i\|\xi\|^2}{2}}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} \hat{G}(\xi) &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i|x_1|^2}{2}} e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \right)^n \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i|x_1-\xi_1|^2}{2}} e^{-i\frac{|\xi_1|^2}{2}} dx_1 \right)^n \end{aligned}$$

On reconnait l'intégrale de Fresnel, ce qui donne le résultat.

On peut à présent expliciter E :

$$\begin{aligned}
< E, \tilde{\varphi} > &= < \tilde{E}, \varphi > \\
&= \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,\xi) e^{-it\|\xi\|^2} d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,\xi) \frac{e^{-in\pi/4}}{(\sqrt{2\pi})^n} \tilde{G}(\sqrt{2t}\xi) d\xi \\
&= \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(t,x) \frac{e^{-in\pi/4}}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{i\|x\|^2/4t} dx
\end{aligned}$$

la dernière ligne s'obtenant par dilatation dans les transformées de Fourier.

$\square$