

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

2012-2013

Référence : Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation (3e édition)*, Dunod, 2006, p.329.

**Proposition.**

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{-itx}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^q e^{-itx} f(x) \right| = |x|^q |f(x)| \in L^1$$

car  $x \mapsto |x|^q |f(x)| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Donc, pour  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} (-ix)^q f(x) dx$$

Montrons par récurrence sur  $p$  que pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$ , il existe  $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que :

$$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) dx$$

C'est vrai pour  $p = 0$  car  $x^q f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

On suppose que c'est vrai à l'ordre  $p$ , alors par IPP :

$$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = -\frac{1}{it} [e^{-itx} g_{p,q}(x)]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x) dx$$

$g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  donc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_{p,q}(x) = 0$ .

On pose  $g_{p+1,q} = \frac{1}{i} g'_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors :

$$t^{p+1} \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p+1,q}(x) dx$$

D'où :

$$\left| t^p \hat{f}^{(q)}(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)| dx = C_{p,q} < \infty$$

car  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ .

Donc  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . □