Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Références :

– Alessandri, *Thèmes de Géométrie*, p.141 et 160

Enoncés :

Théorème 1

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe q forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$.

Théorème 2 (*Enoncé équivalent*)

Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont exactement les sous-groupes de $\mathcal{O}_n$ à conjugaison près.

Preuve : On va montrer les résultats suivants :

Lemme 1

L'enveloppe convexe d'un compact en dimension finie est compacte.

Utilise le théorème de Carathéodory qui borne le nombre de points à utiliser pour décrire l'enveloppe convexe.

Si on note alors $\beta_n = \{x \in E \mid x \text{ est combinaison convexe de } n \text{ points de K}\}$. Alors le théorème de Carathéodory nous donne $\beta_{n+1} = \mathrm{Conv}(K)$ en dimension n.

Ainsi en notant $C_n = \{(t_1, \cdot, t_n) \in [0,1]^n \mid \sum t_i = 1\}$, l'application $C_{n+1} \times K^{n+1} \to \mathrm{Conv}(K)$ définie par $(t, X) \mapsto \sum t_i X_i$ est surjective et continue. Elle envoie donc ce produit de compacts qui est compact sur un compact.

Lemme 2

Soit $K \subset E$ convexe compact non-vide en dimension finie. $v \in \mathcal{L}(E)$ (continue) telle que $v(K) \subset K$, alors il existe $x \in K$ tel que $v(x) = x$

Soit dans $x \in K$, posons $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = v(x_n)$. Soit alors $u_n = (n+1)^{-1} \sum_{0 \le i \le n} x_i$ suite dans $\mathrm{Conv}(K)$. D'après le lemme 1, par compacité, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $u \in \mathrm{Conv}(K)$. Alors :

$$v(u_{\varphi(n)}) = \frac{1}{\varphi(n)+1} \sum_{k=0}^{\varphi(n)} v(x_k) = \frac{1}{\varphi(n)+1} \sum_{k=0}^{\varphi(n)} x_{k+1} = u_{\varphi(n)} + \frac{x_{\varphi(n)+1} - x_0}{\varphi(n)+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u$$

Donc par continuité de v, $v(u) = u$.

Théorème 3

Si G sous-groupe compact de $GL(E)$, et K compact convexe non vide de E, alors il existe un élément de K fixé par tous les éléments de G.

Lemme 3

Il existe une norme sur E qui soit G-invariante : $\forall g \in G, x \in E$, on a $N(g \cdot x) = N(x)$.

On pose $N(x) = \max_{g\in G} \|gx\|$. Cette application existe par compacité et il est évident qu'elle est positive définie homogène et G-invariante. De plus $N(x+y) \leq \max_{g\in G} \|gx\| + \|gy\| \leq \max_{g\in G} \|gx\| + \max_{g\in G} \|gy\| \leq N(x) + N(y)$. C'est donc bien une norme.

On remarque également que le cas d'égalité : $N(x+y) = N(x) + N(y)$ nécessite $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. En particulier x et y doivent être positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire $\Rightarrow$ cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ positivement liés).

On peut maintenant prouver le théorème 3 : Posons pour $g \in G$, $F_g = \{x \in K \mid gx = x\}$ fermé de K. Alors par propriété de Borel-Lebesgue pour le compact K : $\cap_g F_g = \emptyset$ **ssi** $\exists p$ tel que $\cap_{1\leq i\leq p} F_{g_i} = \emptyset$.

Soit donc $p \geq 0$, $\{g_1, \cdot, g_p\} \subset G$. Posons $g = p^{-1} \sum_{1\leq i\leq p} g_i \in \mathcal{L}(E)$. Alors d'après le lemme 2, il existe un $x \in K$ tel que $gx = x$. Ainsi $N(gx) = N(x)$ et de plus comme N est G-invariante, pour tout i, on a $N(g_i x) = N(x)$. D'où :

$$N(x) = N(gx) = N\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i x\right) \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} N(g_i x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} N(x) = N(x)$$

D'après la remarque précédente, les $g_i x$ sont positivement liés, et comme ils sont de même norme, alors ils sont égaux et égaux à $gx = x$. D'où $x \in \cap_{i\leq p} F_{g_i}$.

On a donc bien montré l'existence d'un point fixe de K sous l'action de G.

A partir de ces résultats : Soit G sous-groupe compact de $GL(E)$, $(E, \|\cdot\|)$ espace euclidien.

On considère $\rho : G \to GL(S_n)$, $A \mapsto {}^tA\_A$. C'est une co-action de groupe linéaire de G sur S_n. $\rho(G)$ est donc un sous-groupe compact de $GL(S_n)$ (ρ est continue car polynomiale en les coefficients de A).

Considérons alors $X = \mathrm{Conv}(\{{}^tMM \mid M \in G\})$. Par hypothèse + lemme 1, c'est un compact convexe non vide de S_n. Et donc d'après le résultat intermédiaire : $\exists S \in X$ telle que $\forall M \in G$, $\rho(M)S = S$.

Soit donc $\langle\cdot,\cdot\rangle_S : (x,y) \mapsto \langle x, Sy\rangle$ c'est bien un produit scalaire sur E car $S \in S_n^{++}$ et de plus pour tout $M \in G$, $\langle Mx, SMx\rangle = \langle x, {}^tMSMx\rangle = \langle x, Sx\rangle$. Donc $G \subset \mathcal{O}(\langle\cdot,\cdot\rangle_S)$.

$\square$