Théorème d'échantillonnage de Shannon

2012-2013

Référence : Michel Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, 1995, p.126-128.

On définit, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi xy} \mathrm{d}x$$

la transformée de Fourier de u. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut prolonger la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.
On définit :

$$BL^2 := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \ / \ \text{supp } \hat{u} \subseteq \mathbb{I} \right\} \text{ où } \mathbb{I} := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

On définit aussi le sinus-cardinal sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème.
BL^2 vérifie les propriétés suivantes :

(i) *BL^2 est un espace de Hilbert.*

(ii) *Tout $u \in BL^2$ possède un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (i.e. u est presque partout égale à une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).*

(iii) *La suite $(sinc(. - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2.*

(iv) *Pour $u \in BL^2$,*

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) sinc(x - k),$$

la série convergeant uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Lemme.
Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et :

$$\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$$

Démonstration. Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\hat{u}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \mathrm{d}x = \|u\|_1$$

donc $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$.
Par densité de $\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \text{supp } u \text{ est compact}\}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}$ convergeant vers u dans $L^1(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\|\hat{u} - \widehat{u_n}\|_\infty \leq \|u - u_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\widehat{u_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Or $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ donc $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. $\square$

Démonstration du théorème.

(i) Pour montrer que BL^2 est complet, il suffit de prouver que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
Soit $(u_n)_n$ une suite de BL^2 convergeant vers u dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par continuité de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, $(\widehat{u_n})_n$ converge vers $\hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, donc en particulier dans $L^2(\Omega)$ où $\Omega := \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.
Par définition de BL^2, $\widehat{u_n}_{|\Omega} = 0$, donc $\hat{u}_{|\Omega} = 0$ et $u \in BL^2$.

(ii) Soit $u \in BL^2$. Par définition, $\hat{u} \in L^2(\mathbb{I})$ donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{I})$ ($\mathbb{I}$ de mesure finie).
$\hat{u} = 0$ en dehors de $\mathbb{I}$ donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$.
Par inversion de Fourier, on a alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} \mathrm{d}y \qquad \text{p.p.} \\ &= \int_{\mathbb{I}} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} \mathrm{d}y \qquad \text{p.p.} \end{aligned}$$

Par le lemme, u a un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
On déduit aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'égalité de Plancherel que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|u(x)| \leq \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{I})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$$

(iii) Posons

$$e_k(x) := \begin{cases} e^{2i\pi kx} \text{ si } |x| \leq 1/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\widehat{e_k}(y) = \operatorname{sinc}(y-k)$.
D'où, par conservation du produit scalaire,

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x-j)\ \operatorname{sinc}(x-k)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e_j\overline{e_k} = \int_{\mathbb{I}} e_j\overline{e_k} = \delta_{j,k}$$

La suite $(\operatorname{sinc}(.-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.
Pour montrer que cette suite est une base hilbertienne de BL^2, il suffit désormais de montrer qu'elle est totale, donc de montrer que son orthogonal dans BL^2 est réduit à $\{0\}$.
Soit donc $u \in BL^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\ \operatorname{sinc}(x-k)\mathrm{d}x = 0$$

On a alors :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} u\widehat{e_k} = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}e_k = \int_{\mathbb{I}} \hat{u}e_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Donc $\hat{u}(y) = 0$ presque partout sur $\mathbb{I}$ car $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\hat{u} = 0$ donc $u = 0$ et $(\operatorname{sinc}(.-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale.

(iv) Par (iii), on a, pour $u \in BL^2$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u,\ \operatorname{sinc}(.-k)\rangle\ \operatorname{sinc}(x-k)$$

la convergence étant uniforme par l'inégalité prouvée à la fin de (ii).
En particulier, pour $x = j \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(j) = \langle u,\ \operatorname{sinc}(.-j)\rangle$$

D'où le résultat recherché.

$\square$