Simplicité de $SO(3)$

On montre que le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions $SO(3)$ est un groupe simple, c'est-à-dire que ses seuls sous-groupes distingués sont $\{Id\}$ et $SO(3)$.

Le principe de la démonstration est issu du livre *Oraux X-ENS, algèbre, tome 3.* Il existe d'autres démonstrations de ce résultat dans les livres *Cours d'algèbre* de Perrin, et *Calcul différentiel. Thèmes d'analyse pour l'agrégation* de Gonnord et Tosel.

1. Soit G un sous-groupe de $SO(3)$, et soit G_0 la composante connexe dans G de l'identité. Montrons que G_0 est un sous-groupe de $SO(3)$, et que $G_0 \lhd SO(3)$ dés que $G \lhd SO(3)$.

   Par définition G_0 contient l'identité. L'application
   $$\begin{aligned} \varphi : \ G_0 \times G_0 &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$
   est continue, et $G_0 \times G_0$ étant connexe, on en déduit que l'image de φ est un connexe de G. De plus elle contient l'identité, donc est incluse dans G_0, ce qui montre que G_0 est un sous-groupe de G.
   Si on suppose désormais que $G \lhd SO(3)$ et si $h \in SO(3)$, alors l'application
   $$\begin{aligned} \mathrm{Int}_h : \ G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$
   est bien définie. Le même argument que plus haut montre que Int_h envoie G_0 dans G_0, et ce pour tout $h \in SO(3)$, ce qui siginifie que G_0 est un sous-groupe distigué de $SO(3)$.

2. Soit désormais G un sous-groupe connexe de $SO(3)$, distingué et non réduit à l'identité. Montrons que G contient un retournement, c'est-à-dire une rotation d'angle π. On en déduira alors que $G = SO(3)$.

   Soit $r \in SO(3)$. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à r dans cette base soit
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   On a $Tr(r) = 1 + 2\cos\theta$, donc la fonction
   $$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow [-1,1] \\ g &\longmapsto \frac{Tr(g)-1}{2} \end{aligned}$$

est bien définie.
Cherchons un élément $s \in G$ tel que $\varphi(s) \leq 0$. Soit g un élément de G distinct de l'identité. On a

$$\frac{Tr(g)-1}{2} = \cos\theta$$

où θ est défini au signe près. Quitte à changer g en g^{-1} on peut supposer que $\theta \in]0,\pi]$. Si $\theta \in [\pi/2, \pi]$ alors $s = g$ convient. Sinon, soit $N = E\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$. On a

$$N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta \leq \frac{\pi}{2} + \theta \leq \pi,$$

donc $s = g^{N+1}$ convient.
Par hypothèse G est connexe, et φ est clairement continue, donc $\varphi(G)$ est un connexe de $[-1,1]$ contenant $\varphi(s) \leq 0$ et $\varphi(Id) = 1$. Or, les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, donc il existe $g \in G$ tel que $\varphi(g) = 0$, c'est-à-dire G contient une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$. L'élément $R = g^2 \in G$ est donc un retournement.
Montrons qu'alors $G = SO(3)$. Pour tout $g \in SO(3)$, l'élément gRg^{-1} est dans G car G est distingué par hypothèse, et est un retournement d'axe $g(\Delta)$ où Δ est l'axe de R. Le fait que $SO(3)$ agisse transitivement sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ montre que G contient tous les retournements. Or tout élément de $SO(3)$ est produit de deux retournements, ce qui conclut.

3. Soit maintenant G un sous-groupe distingué de $SO(3)$. Montrons que $G = \{Id\}$ ou $G = SO(3)$. Si $G_0 \neq \{Id\}$ alors 1 et 2 montrent que $G_0 = SO(3)$, donc a fortiori $G = SO(3)$. Si $G_0 = \{Id\}$ alors montrons que $G = \{Id\}$, ce qui terminera la preuve. Remarquons que dans ce cas toutes les composantes connexes de G sont des singletons. Soit $g \in G$. L'application continue

$$\begin{aligned} \varphi : SO(3) &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

est bien définie car $G \lhd SO(3)$. Le groupe $SO(3)$ est connexe donc l'image de φ est un connexe contenant g, donc est égale à $\{g\}$ d'après la remarque sur les composantes connexes de G. Cela signifie que g commute avec toutes les rotations de l'espace. En particulier g est une rotation qui fixe toutes les droites de $\mathbb{R}^3$, ce qui montre que $g = Id$.