Théorème des quatre sommets

Arnaud Girand

26 juin 2012

Référence :
- [FGN12], p. 335–336

Proposition 1 (Théorème des quatre sommets)
On considère un arc paramétré $\mathcal{C}^3$ τ–périodique, correspondant à un courbe fermée simple, défini comme suit :

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

On suppose que :
- *le paramétrage M est normal ;*
- *la courbure γ de l'arc est positive.*

Alors γ admet au moins 4 points critiques sur chaque période.

Démonstration : Comme M est $\mathcal{C}^3$, sa tangente unitaire T et sa normale unitaire N sont de classe $\mathcal{C}^2$ et γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ces deux fonctions sont de plus τ–périodiques donc on a :

$$\int_0^\tau \gamma'(s)ds = \gamma(\tau) - \gamma(0) = 0 \tag{1}$$

Par intégration par parties on a de plus (toujours par périodicité) :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \gamma'(s)M(s)ds &= \underbrace{[\gamma(s)M(s)]_0^\tau}_{=0} - \int_0^\tau \gamma(s)T(s)ds \\ &= \int_0^\tau \frac{dN}{ds}(s)ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

I.e :

$$\int_0^\tau x(s)\gamma'(s)ds = \int_0^\tau y(s)\gamma'(s)ds = 0 \tag{2}$$

Comme γ est continue τ–périodique, elle admet au moins un maximum et un minimum sur chaque période en lesquels qui sont également des points critiques. On peut donc supposer que γ admet deux points critiques s_1, s_2 tels que $s_1 < s_2 < s_1 + \tau$. De plus, si γ est constante le résultat est trivial donc on peut supposer $\gamma' \neq 0$.

Supposons qu'il s'agisse des seuls points critiques de γ sur $[s_1, s_1 + \tau)$. Alors par (1), γ' ne peut être de signe constant sur $[s_1, s_1 + \tau)$ (car elle serait dans ce cas nulle). De fait, γ' a des signes opposés sur (s_1, s_2) et $(s_2, s_1 + \tau)$. De plus, comme la courbe définie par M délimite un convexe, les ensembles $M([s_1, s_2])$ et $M([s_2, s_1 + \tau])$ sont situé de part et d'autre de la droite[1] $(M(s_1)M(s_2))$ (cf. figure 1). Si on suppose donnée une équation $ax + by + c = 0$ de cette dernière, la fonction $f : s \mapsto (ax(s) + by(s) + c)\gamma'(s)$ doit donc être de signe constant sur $[s_1, s_1 + \tau)$. Or on sait par (1) et (2) que $\int_{s_1}^{s_1+\tau} f(s)ds = 0$,d'où $f = 0$ ce qui est absurde car alors $M((s_1, s_2))$ et $M((s_2, s_1 + \tau))$ seraient inclus dans la droite $(M(s_1)M(s_2))$ et donc l'arc tout entier le serait.

1. $M(s_1) \neq M(s_2)$ car γ est non constante.

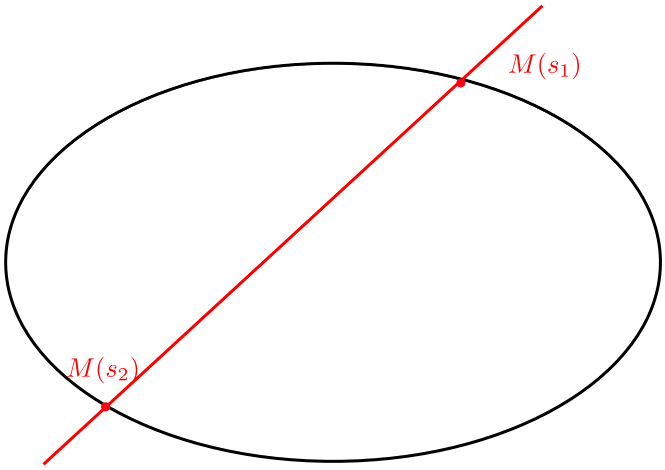

FIGURE 1 – Droite $(M(s_1)M(s_2))$

γ' admet donc un troisième point critique s_3 dans $[s_1, s_1 + \tau)$ et on peut supposer, quitte à remplacer (s_1, s_2) par $(s_2, s_1 + \tau)$ que l'on a $s_1 < s_3 < s_2 < s_1 + \tau$. Enfin, par symétrie, on peut supposer que s_1 correspond au minimum de γ et s_2 à son maximum. Si on suppose que ce sont le seuls points critiques de γ' sur $[s_1, s_1 + \tau)$ alors γ' est de signe constant sur (s_1, s_3), (s_3, s_2) et $(s_2, s_1 + \tau)$. De plus, par "extremalité" de s_1 et s_2 les variations de γ' sont nécessairement les suivantes :

s	s_1		s_3		s_2		$s_1 + \tau$
$\gamma'(s)$	0	> 0	0	> 0	0	< 0	

De fait γ' est positive sur (s_1, s_2) et négative sur $(s_2, s_1 + \tau)$, chose impossible comme on l'a démontré précédemment. D'où le résultat.

Références

[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.