Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

⚠ No Ref !
↳ Alessandri "thèmes de géométrie", mais ce bouquin est introuvable.

Théorème Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Lemme Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, K un compact convexe de E, et $H \leq GL(E)$ compact qui fixe K. Alors il existe $a \in K$ invariant par H.

Preuve :

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E.
On pose $\forall x \in E$, $N(x) = \sup_{g \in H} \|gx\|$
Comme H est compact et $g \mapsto \|gx\|$ continue, ce suprémum est atteint : $N(x) = \max_{g \in H} \|gx\|$.

N est une norme sur E. En effet:

- $N(x) = 0 \Rightarrow \forall g \in H,\ gx = 0 \Rightarrow$ en particulier, $id(x) = x = 0$
- $N(\lambda x) = \max_{g \in H} \|g \lambda x\| = \max_{g \in H} |\lambda| \|g(x)\| = |\lambda| N(x)$
- $x, y \in E$.

  $\exists g \in H$, $N(x+y) = \|g(x+y)\|$

  Alors $N(x+y) = \|g(x+y)\| \leq \|gx\| + \|gy\| \leq N(x) + N(y)$. $(*)$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire: Si $N(x+y) = N(x) + N(y)$, on a égalité dans $(*)$ donc $\|g(x+y)\| = \|g(x)\| + \|g(y)\|$.

donc $g(x)$ et $g(y)$ sont liés positivement :
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda g(x) = \mu g(y)$ donc $\lambda x = \mu y$ et x et y sont liés positivement.

Comme K est compact et $x \mapsto N(x)$ continue (pour $\|\cdot\|$, en dimension finie), il existe $a \in K$, $N(a)$ est minimale sur K.
De plus, a est unique :
si $N(a) = N(a') = \min_{x \in K} N(x) =: m$, alors,

$$m \leqslant N\left(\frac{a+a'}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} N(a) + \frac{1}{2} N(a') = \frac{m+m}{2} = m$$

On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire donc a et a' sont positivement liés donc comme elles ont même normes elles sont égales.

Pour $g \in H$, $N(ga) = \sup_{h \in H} \|hga\| = \sup_{k \in H} \|ka\| = N(a)$

Donc par unicité de l'élément de K minimisant la norme (ga est dans K par hypothèse), on a $ga = a$. $\square$.

$\boxed{\text{Preuve théorème}}$

Soit $G \leqslant GL_n(\mathbb{R})$ compact.
On pose $E = S_n(\mathbb{R})$ et $\rho_A(S) = {}^tASA$ pour $A \in G$, $S \in E$.
Alors $\rho_A \in GL(E)$.
En fait, il s'agit de l'action par congruence $G \curvearrowright S_n(\mathbb{R})$

Notons ρ cette action : $\rho : \begin{cases} G \longrightarrow GL(E) \\ A \longmapsto \rho_A \end{cases}$

pplication ρ est continue.

[on peut le voir par exemple via la matrice de ρ_A dans une base de $S_n(\mathbb{R})$, continue en les coefficients de A]

Donc, $H = \rho(G)$ est un compact.

Il reste à définir K compact convexe pour pouvoir appliquer le lemme.

$\mathrm{Orb}(I_n) = \{ {}^tAA \ , A \in G\}$ est compact comme image continue du compact G. Donc par le théorème de Carathéodory, $K = \mathrm{conv}(\mathrm{Orb}(I_n))$ est compact.

[Si X est compact en dimension $k < +\infty$, $\mathrm{conv}\, X$ aussi.
Cf Carathéodory, si $L = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$,
l'application $\begin{cases} X^{n+1} \times L \longrightarrow \mathrm{conv}(X) \\ ((x_i), (\lambda_i)) \longmapsto \sum \lambda_i x_i \end{cases}$ est surjective.

Comme $X^{n+1} \times L$ est compact (L est fermé-borné en dim finie), $\mathrm{conv}(X)$ l'est aussi]

Par définition, $\mathrm{Orb}\, I$ est stable sous l'action de G, donc K est stable par tout élément de $H = \rho(G)$. (linéarité de ρ_A)

Par le lemme, on a donc $S \in K$, $\forall A \in G$, $\rho_A(S) = S$.
De plus, $\mathrm{Orb}(I) \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est convexe donc $K \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

S a donc une racine carré $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a $\forall A \in G,\ T^2 = {}^tA T^2 A$

d'où $\forall A \in G,\ {}^t(TAT^{-1})(TAT^{-1}) = I_n$

Donc $\forall A \in G,\ TAT^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.