école normale supérieure rennes

Fonctions booléennes sur le cube discret et applications.

Robinson Le Bihan

Encadré par Dario Cordero-Erausquin

IMJ-PRG

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

9 Mai - 29 Juin 2022

Table des matières

1 Introduction

Le cube discret est l'ensemble des n-uplets formés de 0 et de 1, ou de -1 et de 1. Ici le cube discret sera l'ensemble $\{-1, 1\}^n$ bien que tous la plupart des résultats ont leur analogue sur $\{0, 1\}^n$. Les fonctions booléennes sur le cube discret sont les fonctions de qui prennent leurs arguments dans $\{-1, 1\}^n$ et qui sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mais on étendra directement cette définition aux fonctions qui sont à valeurs réelles quelconques. L'outil indispensable pour les étudier étant leur transformée de FOURIER. L'étude de ces fonctions présente de nombreuses applications dans différents domaines : à la fois en combinatoire, en informatique théorique, en physique statistique et dans d'autres domaines.

Il est également possible de décrire à travers ces fonctions des phénomènes de théorie du choix social, qui étudie les manières de prendre des décisions collectives. Concrètement, si une fonction booléenne prend comme valeur -1 ou 1, on pourra attribuer à cette fonction booléenne une valeur de "règle de vote". Nicolas de CONDORCET a présenté en 1784 [2] un paradoxe sur un certain système de vote : si on demande à une population de classer trois candidats, il se peut que chaque candidat soit préféré aux autres et ainsi que personne ne puisse être élu. Via l'outil des fonctions booléennes et de leur transformée de FOURIER, on peut expliquer et approfondir ce phénomène. En particulier, l'économiste Kenneth ARROW énonça en 1951 le théorème de ARROW : éviter toute situation contradictoire sur un système de vote de CONDORCET revient à ne considérer l'avis que d'une seule personne, qu'on appelle alors dictateur.

L'opérateur de bruit permet d'associer à une fonction booléenne les valeurs qu'elle prendra en moyenne quand un bruit est ajouté. Concrètement, ce bruit change les vecteurs de $\{-1, 1\}^n$ pris en argument par f, en prenant pour chaque coordonnée une valeur opposée avec une certaine probabilité. En terme de système de vote, cette situation correspond à une mauvaise réception des votes avec une certaine probabilité. Il est alors possible de décrire cet opérateur de bruit, qui vérifie une propriété de semi-groupe et d'hypercontractivité et on obtient ensuite l'inégalité de BONAMI-BECKNER, qui est un résultat fondamental d'hypercontractivité. De cette inégalité, on pourra démontrer le théorème FKN de Ehud FRIEDGUT, Gil KALAI et Assaf NAOR (2002, [3]), qui explique qu'une fonction booléennes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont les coefficients de FOURIER se concentrent sur les deux premiers niveaux est soit proche d'un dictateur, i.e une fonction qui ne prend en compte qu'une seule coordonnée, soit proche d'une fonction constante. Ce théorème permet en particulier de donner une version stabilisée du théorème de ARROW, dans le sens où s'il est presque sûr de ne pas faire face au paradoxe de CONDORCET, alors il y a un votant pour lequel il est très probable que sont avis soit le seul considéré.

2 Fonctions booléennes et transformées de FOURIER

Remarque 1. n désignera un entier naturel et $[n]$ est l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Soit $f : \{-1, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$f = \sum_{v \in \{-1,1\}^n} f(v) \mathbf{1}_{\{v\}}. \tag{1}$$

Si on note $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \{-1, 1\}^n$, alors pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$, on vérifie que

$$\mathbf{1}_{\{v\}}(x) = \left(\frac{1 + v_1 x_1}{2}\right) \left(\frac{1 + v_2 x_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{1 + v_n x_n}{2}\right) \tag{2}$$

Et donc en combinant (1) et (2) on comprend que f s'exprime en combinaison linéaire de produits $\prod_{i \in S} x_i$ pour $S \subseteq [n]$. C'est cette décomposition qu'on appellera la décomposition de FOURIER de cette fonction. On veut alors définir la transformée de FOURIER de f par la fonction qui associe à chaque partie $S \subseteq [n]$ le coefficient devant $\prod_{i \in S} x_i$, mais il faut d'abord prouver que cette décomposition est unique.

Définition 1 (Fonctions de WALSH-FOURIER)**.** Pour $S \subseteq [n]$, on notera

$$w_S : x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n \mapsto \prod_{i \in S} x_i \in \{-1, 1\}.$$

Pour $S = \emptyset$, on pose $w_\emptyset = 1$.

Pour mieux décrire l'espace $\mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$, on va montrer que la famille $(w_S;\, S \subseteq [n])$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire naturel et notre transformée de FOURIER sera construite. Introduisons d'abord une mesure sur le cube discret.

Définition 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera σ_n la mesure de probabilité uniforme :

$$\forall A \subseteq \{-1, 1\}^n,\ \sigma_n(A) = \frac{|A|}{2^n}.$$

Remarque 2. Dans ce cas, pour toute $f : \{-1, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\{-1,1\}^n} f d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x).$$

La propriété essentielle à propos de cette mesure est la suivante :

Proposition 1. *σ_n est une mesure produit : $\sigma_n = \sigma_1^{\otimes n}$ où σ_1 est une mesure de* RADEMACHER. *En particulier, pour tout vecteur aléatoire $x \sim \sigma_n$, ses coordonnées sont indépendants entre elles.*

Preuve. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \sim \sigma_n$. On veut montrer que pour tout $i \in [n]$, x_i est de loi de RADEMACHER. En effet, si $i \in [n]$,

$$\mathbb{P}[x_i = 1] = \sum_{(\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{i-1}}, \widetilde{x_{i+1}}, \ldots, \widetilde{x_n}) \in \{-1,1\}^{n-1}} \mathbb{P}[x = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{i-1}}, x_i, \widetilde{x_{i+1}}, \ldots, \widetilde{x_n})] = \sum_{\tilde{x} \in \{-1,1\}^{n-1}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

De même, $\mathbb{P}[x_i = -1] = \frac{1}{2}$. □

Définition 3. On notera $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ le produit scalaire définit ainsi :

$$\forall f, g : \{-1, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \langle f, g \rangle = \int_{\{-1,1\}^n} fg\, d\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x)g(x) = \mathbb{E}_{x \sim \sigma_n}[f(x)g(x)].$$

Remarque 3 (Notations). Pour $f : \{-1, 1\}^n \longrightarrow \{-1, 1\}$, on notera $\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}_{x \sim \sigma_n}[f(x)]$ et $\mathrm{Var}[f] = \mathrm{Var}_{x \sim \sigma_n}[f(x)]$.

Proposition 2.

1. *Pour* $S, T \subseteq [n]$, $w_S w_T = w_{(S\cup T)\setminus(S\cap T)} = w_{S\Delta T}$
2. *Pour* $S \subseteq [n]$, $\mathbb{E}[w_S] = \delta_{S\emptyset}$.

Preuve.
1) Soient $S, T \subseteq [n]$. Alors, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1,1\}^n$,

$$w_S(x)w_T(x) = \prod_{i\in S} x_i \prod_{j\in S} x_j = \prod_{i\in(S\cup T)\setminus(S\cap T)} x_i \prod_{j\in S\cap T} x_j^2 = \prod_{i\in S\Delta T} x_i \prod_{j\in S\cap T} 1 = w_{S\Delta T}(x).$$

2) Soit $S \subseteq [n]$. Alors, on a vu dans la proposition 1 que les composantes d'un vecteur aléatoire de loi σ_n sont de loi de RADEMACHER et sont indépendantes entre elles. De fait, si $S \neq \emptyset$,

$$\mathbb{E}[w_S] = \mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}\left[\prod_{i\in S} x_i\right] = \prod_{i\in S}\left(\mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}[x_i]\right) = \prod_{i\in S} 0 = 0.$$

□

On peut donc énoncer le théorème suivant qui se déduit directement de la proposition 2.

Théorème 1. *La famille* $(w_S;\ S \subseteq [n])$ *est une base orthormée de* $\left(\mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\right)$.

On a maintenant tous les outils pour définir notre transformée de FOURIER.

Définition 4. On appelle transformée de FOURIER de f et on note $\widehat{f}$ l'application qui à chaque $S \subseteq [n]$ associe le coefficient devant w_S dans la décomposition unique de f dans la base de WALSH-FOURIER. Concrètement, pour toute $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, f s'exprime de manière unique comme :

$$f = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S) w_S.$$

Remarque 4. Dans la suite, pour les singletons, on notera toujours $\widehat{f}(i)$ (resp. w_i) au lieu de $\widehat{f}(\{i\})$ (resp. $w_{\{i\}}$)

Définissons un dernier outil.

Définition 5. Soient $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $0 \leq k \leq n$.

— La partie de f de degré k est la fonction

$$f^{=k} = \sum_{S\subseteq[n],|S|=k} \widehat{f}(S) w_S.$$

— Le poids de FOURIER de f de degré k est la quantité

$$W^k[f] = \sum_{S\subseteq[n],\,|S|=k} \widehat{f}(S)^2. \tag{3}$$

Remarque 5. On définit de la même manière les fonctions $f^{<k}$, $f^{\leq k}$, $f^{\geq k}$, $f^{>k}$ et les poids $W^{<k}$, $W^{\leq k}$, $W^{\geq k}$, $W^{>k}$.

Enonçons les propriétés de base :

Proposition 3. *Soit* $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. *Pour* $S \subseteq [n]$, $\widehat{f}(S) = \langle f, w_S\rangle$.

2. $\langle f, f\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)^2 = \sum_{k=0}^{n} W^k[f]$.

3. *Si* f *est à valeurs dans* $\{-1,1\}$, $f^2 = 1$ *donc* $\sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)^2 = \mathbb{E}[f^2] = 1$.

4. *Pour toute* $g : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\langle f, g\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)\widehat{g}(S)$.

5. $\mathbb{E}[f] = \widehat{f}(\emptyset)$.

6. $Var[f] = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}[f]^2 = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)^2 - \widehat{f}(\emptyset)^2 = \sum_{k=0}^{n} W^k[f] - \widehat{f}(\emptyset)^2$.

3 Application à la théorie du choix social

3.1 Règles de vote ou fonctions de choix social

Une fonction $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ peut être perçue comme un outil de décision collective : chacun des n votants choisi ± 1, et pour chaque possibilité de résultat, on associe une décision ± 1. C'est pourquoi on pourra appeler par la suite une telle fonction $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ une règle de vote ou encore une fonction de choix social. Prenons un exemple important pour la suite qui donne une perspective du procédé utilisé : la fonction majorité.

Définition 6. Une fonction majorité est une fonction qui pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1,1\}^n$ renvoie la quantité *signe*$(x_1 + \dots + x_n)$, dès lors que $x_1 + \dots + x_n \neq 0$. Pour n impair il n'existe qu'une seule fonction majorité notée Maj_n.

On comprend bien qu'une fonction majorité renvoie celui de -1 ou de 1 qui est le plus présent dans x. Elle correspond à la manière la plus répandue d'opérer un vote entre deux personnes : celui qui a le plus de votes en sa faveur gagne. On pourrait également considérer les avis des votants en les pondérant différemment. C'est par exemple le principe de la majorité qualifiée au conseil européen : chaque Etat dispose d'un nombre de voix selon la taille de sa population et une pondération permet de palier aux disparités de populations entre pays afin qu'ils aient tous le même impact.

On peut également définir d'autres règles de vote. Il y a le dictateur, important pour la suite :

Définition 7. Pour $i \in [n]$, le i-ème dictateur est $w_i : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, qui on le rappelle est défini pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1,1\}^n$ par $w_i(x) = x_i$. Le i-ème contre-dictateur est $-w_i$.

Cette règle de vote correspond à un système où l'on ne prend l'avis que d'une seule personne dans toute la population, à savoir un certain "dictateur", d'où son nom. Le contre-dictateur serait un dictateur malchanceux car on prendra toujours l'exact opposé de son avis. On peut les caractériser :

Proposition 4 (Caractérisation des fonctions booléennes d'une variable au plus)**.** *Les seules fonctions de* $\{-1,1\}^n$ *à valeurs dans* $\{-1,1\}$ *qui dépendent d'aucune variable sont les fonctions constantes égales à* 1 *et* -1 *et celles qui en dépendent exactement d'une sont les dictateurs et contre-dictateurs.*

Preuve. En effet, une telle fonction s'écrit pour un certain $i \in [n]$, $a + bw_i$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Immédiatement, $1 = ||a + bw_i||_2^2 = a^2 + b^2$ et $|a + b| = 1$, donc au carré, $a^2 + b^2 + 2ab = 1$, i.e. $ab = 0$. Ainsi ($a = 0$ et $|b| = 1$) ou ($|a| = 1$ et $b = 0$), ce qui correspond exactement aux fonctions évoquées, qui sont réciproquement bien booléennes d'au plus une variable. $\square$

On peut énoncer des caractéristiques intéressantes vis-à-vis des règles de vote :

Définition 8. Une règle de vote $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ est dite

— monotone si : $\forall x, y \in \{-1,1\}^n$, $(\forall i \in [n], x_i \leq y_i) \implies f(x) \leq f(y)$,

— impaire si $f(-\,\cdot\,) = -f(\,\cdot\,)$,

— unanime si $f(1,\dots,1) = 1$ et $f(-1,\dots,-1) = -1$,

— symétrique si pour toute permutation $\pi \in S_n$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, $f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}) = f(x)$,

— équilibrée si $\mathbb{E}[f] = 0$.

Remarque 6. Dans une situation de vote à deux candidats, la monotonie peut s'interpréter ainsi : plus le nombre de votants pour un des candidats est important, plus il a de chances de remporter l'élection. L'imparité s'explique par : si tout le monde inverse son vote, c'est l'autre candidat qui est élu. Enfin, une règle de vote symétrique est une règle de vote qui ne prend pas en compte l'ordre dans lequel la population s'organise pour voter et ne hierarchise pas les votes. Ces trois propriétés sont essentielles et pourtant très restrictives, ce qu'on va décrire dans la prochaine proposition.

Proposition 5.

1. *Il existe des règles de votes symétriques et impaires si et seulement si n est impair.*
2. *Pour $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, f est monotone, impaire et symétrique si et seulement si n est impair et $f = \mathrm{Maj}_n$.*

Preuve.
1) On suppose par l'absurde que n est pair et qu'il existe $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ symétrique et impaire. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{1,\dots,1}_{\text{de longueur } n/2}, -1,\dots,-1\right) &= f(-1,\dots,-1,1,\dots,1) \quad \text{par symétrie} \\ &= -f(1,\dots,1,-1,\dots,-1) \quad \text{par imparité} \end{aligned}$$

donc $f(1,\dots,1,-1,\dots,-1) = 0$ ce qui est absurde. Donc s'il existe f symétrique et impaire, n est impair. Réciproquement, la majorité est clairement symétrique et impaire.

2) Montrons d'abord que la majorité est monotone. En effet, si $x, y \in \{-1,1\}^n$, si pour tout $i \in [n]$, $x_i \leq y_i$, alors $x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n$ donc $signe(x_1 + \cdots + x_n) \leq signe(y_1 + \cdots + y_n)$.

Réciproquement, soit f monotone, impaire et symétrique. On a vu en 1) que dans ce cas, n est impair. Montrons que $f = \mathrm{Maj}_n$. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \{-1,1\}^n$ avec $x_1 + \cdots + x_n \geq 0$. Montrons que $f(x) \geq 0$. Notons $k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ le nombre de 1 dans x. Or par monotonie, puis par imparité, puis par symétrie,

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{1,\dots,1}_{\text{de longueur } k}, -1,\dots,-1\right) \geq f\left(\underbrace{1,\dots,1}_{\text{de longueur } n-k}, -1,\dots,-1\right) &= -f\left(\underbrace{-1,\dots,-1}_{\text{de longueur } n-k}, 1,\dots,1\right) \\ &= -f\left(\underbrace{1,\dots,1}_{\text{de longueur } k}, -1,\dots,-1\right). \end{aligned}$$

Et donc, par symétrie, $f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{de longueur } k}, -1, \ldots, -1\right) \geq 0$. On conclut dans le cas $x_1 + \cdots + x_n \leq 0$ que $f(x) \leq 0$ par imparité. Comme f est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, f est bien la fonction Maj_n. $\square$

3.2 Opérateurs utiles

On aura besoin dans la suite de l'étude de certains opérateurs. Définissons la dérivation discrète :

Définition 9. Soit $i \in [n]$. Pour $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$ donnée, on définit

$$D_i f : x \mapsto \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{2}.$$

Définissons aussi l'opérateur d'espérance :

Définition 10. Soit $i \in [n]$. Le i-ème opérateur d'espérance est l'opérateur

$$E_i : f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n} \mapsto \Big(x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathbb{E}_{u_i \sim \sigma_1}[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)]\Big).$$

Alors on peut énoncer des propriétés directes sur ces opérateurs :

Proposition 6. *Soient $i \in [n]$, $f : \{-1, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{)1, 1\}^n$. Alors,*

1. $D_i f(x) = \displaystyle\sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \ni i}} \widehat{f}(S) w_{S \setminus \{i\}}(x)$.
2. $E_i f(x) = \displaystyle\sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \not\ni i}} \widehat{f}(S) w_S(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{2}$.
3. $f(x) = x_i D_i f(x) + E_i f(x)$.

Remarque 7. On remarque que $D_i f$ et $E_i f$ ne dépendent pas de la i-ème coordonée. La décomposition $f = w_i D_i f + E_i f$ sera alors très utile par la suite pour prouver des résultats fonctionnels par récurrence. C'est ce qu'on utilisera en particulier dans la preuve du théorème 8.

3.3 Influence

Pour un système de vote donné, on peut se demander quelle importance a le vote d'une personne vis-à-vis du résultat. On définit alors l'influence :

Définition 11. Soit $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$. L'influence de la i-ème coordonnée vis-à-vis de f est la quantité suivante :

$$\mathrm{Inf}_i[f] = \mathbb{P}_{x \sim \sigma_n}\left(f(x) \neq f\left(\tau_i(x)\right)\right),$$

où $\tau_i(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Or, $D_i f(x) = \left|\dfrac{f(x) - f\left(\tau_i(x)\right)}{2}\right| = \mathbf{1}_{f(\,\cdot\,) \neq f(\tau_i(\,\cdot\,))}(x)$, donc

$$\mathrm{Inf}_i[f] = \mathbb{P}_{x \sim \sigma_n}\left(f(x) \neq f\left(\tau_i(x)\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} \left(\frac{f(x) - f\left(\tau_i(x)\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} (D_i f(x))^2.$$

On peut donc généraliser la définition 11 aux fonctions à valeurs réelles quelconques :

Définition 12. Soit $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$. L'influence de la i-ème coordonnée vis-à-vis de f est la quantité suivante :

$$\mathrm{Inf}_i[f] = \mathbb{E}\left[D_i f^2\right] = ||D_i f||_2^2.$$

Proposition 7. *Pour $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $i \in [n]$*

1. $$\mathrm{Inf}_i[f] = \sum_{S \subseteq [n],\, i \in S} \widehat{f}(S)^2.$$

2. *Si f est monotone,*
$$\mathrm{Inf}_i[f] = \widehat{f}(i)$$

Preuve.
1) En effet, on rappelle que $D_i f = \sum_{S \subseteq [n],\, i \in S} \widehat{f}(S) w_{S \setminus \{i\}}$, on conclut alors par la définition 12.

2) Par monotonie, $D_i f$ est positive et alors $D_i f = \mathbf{1}_{f(\,\cdot\,) \neq f(\tau_i(\,\cdot\,))}$, donc avec la décomposition de FOURIER rappelée ci-dessus,

$$\mathrm{Inf}_i[f] = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} D_i f(x) = \mathbb{E}[D_i f] = \widehat{D_i f}(\emptyset) = \widehat{f}(\emptyset) = \widehat{f}(i).$$

□

On peut maintenant définir l'influence totale d'une règle de vote :

Définition 13. l'influence totale de $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ est la somme des influences de chaque coordonnée :

$$\mathrm{I}[f] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Inf}_i[f].$$

On peut directement en tirer une interprétation :

Proposition 8. *Soit $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$.*

1. *Si f est monotone,*
$$\mathrm{I}[f] = \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i).$$

2. *Considérons une élection à deux candidats. Si d est le nombre de votants d'accords avec le résultat de l'élection, alors*
$$\mathbb{E}[d] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i).$$

Preuve. 1) Découle directement de la proposition 7.

2) On veut d'abord exprimer d. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les suffrages. Alors $|x_1 + \cdots + x_n|$ est le nombre de votes qu'il y a en en plus pour le gagnant, c'est-à-dire le nombre de votes pour le gagnant auquel on enlève le nombre de votes pour le perdant :

$$|x_1 + \cdots + x_n| = d(x) - (n - d) = 2d(x) - n. \tag{4}$$

Or, si le gagnant est -1, c'est-à-dire $f(x) = -1$, alors il y a plus de personnes qui ont voté pour -1 que pour 1 comme f est monotone. Alors $x_1+\cdots+x_n \leq 0$ et donc $|x_1+\cdots+x_n| = f(x)(x_1+\cdots+x_n)$. De même si le gagnant est 1, $|x_1+\cdots+x_n| = f(x)(x_1+\cdots+x_n)$. On déduit donc de (4) que

$$d(x) = \frac{n}{2} + \frac{f(x)(x_1+\cdots+x_n)}{2}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[d] = \frac{n}{2} + \mathbb{E}\left[\frac{f(x)(x_1+\cdots+x_n)}{2}\right] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}[f(x)x_i] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\langle f, w_i\rangle = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\widehat{f}(i). \quad (5)$$

□

La dernière proposition veut tout simplement dire que quand la règle de vote est monotone, plus la population a une influence sur le résultat, plus elle devrait en être satisfaite. Une question naturelle ensuite est celle de savoir pour quelle(s) fonction(s) la quantité $\sum_{i=0}^{n}\widehat{f}(i)$ est maximisée.

Proposition 9.

1. *Les seules fonctions $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ qui maximisent la quantité $\sum_{i=1}^{n}\widehat{f}(i)$ sont les fonctions majorité.*
2. *Si n est impair,*

$$\sum_{i=1}^{n}\widehat{\mathrm{Maj}_n}(i) = \mathrm{I}[\mathrm{Maj}_n] = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O\left(n^{-1/2}\right).$$

3. *Si n est pair, si f est une fonction majorité,*

$$\mathrm{I}[f] = \mathrm{I}[\mathrm{Maj}_{n-1}] = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O\left(n^{-1/2}\right).$$

4. *Soit $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$,*

$$\sum_{i=1}^{n}\widehat{f}(i) \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O\left(n^{-1/2}\right).$$

   En particulier, si f est monotone,

$$\mathrm{I}[f] \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O\left(n^{-1/2}\right).$$

Preuve.
1) Soit $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. Alors,

$$\sum_{i=0}^{n}\widehat{f}(i) = \mathbb{E}\left[f(x)(x_1+\cdots+x_n)\right] \leq \mathbb{E}\left[|f(x)(x_1+\cdots+x_n)|\right] = \mathbb{E}\left[|x_1+\cdots+x_n|\right]$$

D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, il y a égalité si et seulement si dès que $x_1+\cdots+x_n \neq 0$, $f(x)(x_1+\cdots+x_n) \geq 0$, c'est-à-dire, comme f est à valeurs dans $\{-1,1\}$, que

$f(x) = signe(x_1 + \cdots + x_n)$ dès que $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$.

2) Soit n impair et $i \in [n]$ fixé. Revenons à la première définition de $\mathrm{Inf}_i(\mathrm{Maj}_n)$:

$$\mathrm{Inf}_i[\mathrm{Maj}_n] = \mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(\mathrm{Maj}_n(x) \neq \mathrm{Maj}_n\left(\tau_i(x)\right)\right) = \frac{1}{2^n}\#\left\{x \in \{-1,1\}^n ; \mathrm{Maj}_n(x) \neq \mathrm{Maj}_n\left(\tau_i(x)\right)\right\}$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$.

$$\mathrm{Maj}_n(x) \neq \mathrm{Maj}_n\left(\tau_i(x)\right) \Leftrightarrow signe\left(\sum_{j\neq i} x_j + 1\right) \neq signe\left(\sum_{j\neq i} x_j - 1\right).$$

Etant donné que $\sum_{j\neq i} x_j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Maj}_n(x) \neq \mathrm{Maj}_n\left(\tau_i(x)\right) \Leftrightarrow \sum_{j\neq i} x_j = 0$. On cherche à ranger $\binom{n-1}{2}$ "1" et $\binom{n-1}{2}$ "-1" dans les $n-1$ cases $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$: on peut le faire de $2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}$ manières, le 2 traduisant les deux choix possibles pour x_i : 1 et -1.

$$\mathrm{Inf}_i[\mathrm{Maj}_n] = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!^2}. \tag{6}$$

Remarque 8. Tout les votants ont la même influence pour un vote par la fonction majorité.

Utilisons la formule de Stirling :

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\sqrt{2\pi N} + O(N^{-1/2})\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inf}_i[\mathrm{Maj}_n] &= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\left(\sqrt{2\pi(n-1)} + O((n-1)^{-1/2})\right)}{\left[\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\sqrt{2\pi\frac{n-1}{2}} + O\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^{-1/2}\right)\right)\right]^2} = \frac{\sqrt{2\pi n} + O(n^{-1/2})}{\left(\sqrt{\pi n} + O(n^{-1/2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n} + O(n^{-1/2})}{\pi n}\frac{1}{\left[1 + O(n-1)\right]^2} = \frac{\sqrt{2\pi n} + O(n^{-1/2})}{\pi n}\left(1 + O(n^{-1})\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n} + O(n^{-1/2})}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} + O(n^{-3/2}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{I}[\mathrm{Maj}_n] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Inf}_i(\mathrm{Maj}_n) = n\left(\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!^2}\right) = n\left(\sqrt{\frac{2}{n\pi}} + O(n^{-3/2})\right) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} + O(n^{-1/2}).$$

3) Soit n pair, $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ une fonction majorité et $i \in [n]$. Alors,

$$I[f] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[D_i f^2] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{-1,1\}^n} D_i f(x)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{x_i}\frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} D_i f(x_1,\ldots,x_n)^2.$$

Or, $D_i f$ ne dépendant pas de la composante en i, on note $\widetilde{D_i f}$ l'application agissant formellement sur $\{-1,1\}^{n-1}$, telle que pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, $D_i f(x_1,\ldots,x_n) = \widetilde{D_i f}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Ainsi, $\widetilde{D_i f} = D_i \mathrm{Maj}_{n-1}$, et en utilisant le fait que toutes les influences sont égales pour la majorité sur $\{-1,1\}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} I[f] &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_i} \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \widetilde{D_i f}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_i \in \{-1,1\}} \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[D_i \mathrm{Maj}_{n-1}{}^2\right] = \mathrm{I}[\mathrm{Maj}_{n-1}]. \end{aligned}$$

□

On peut accéder facilement à un dernier résultat :

Théorème 2 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit* $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$. *Alors*

$$\mathrm{Var}[f] \leq \mathrm{I}[f].$$

Qu'on déduit aisément du lemme suivant, par le fait que $\mathrm{Var}[f] = \sum_{k=1}^{n} W^k(f) - \widehat{f}(\emptyset)^2$ (voir proposition 6).

Lemme 1. *La décomposition de Fourier de* $\mathrm{I}[f]$ *est la suivante :*

$$\mathrm{I}[f] = \sum_{S \subseteq [n]} |S| \widehat{f}(S)^2 = \sum_{k=0}^{n} k W^k(f).$$

Preuve. Découle directement de la proposition 7. □

3.4 Stabilité du bruit

On se place dans une élection entre deux candidats. On suppose que les votants choisissent indépendamment et uniformément leurs votes. La situation représentée est la suivante : s'il y a une certaine probabilité que leur vote soit inversé, sûrement par des problèmes logistiques, comment le système de vote réagit-il ? On se demande comment le résultat pourra être modifié. Si x représente les intentions de votes et y les votes enregistrés, on se demande si $f(x) = f(y)$. Dans cette situation, f étant à valeurs dans $\{-1,1\}$, étudier le produit $f(x)f(y)$ revient à étudier la différence de résultats. Traduisons cette situation par la notion de variables ρ-corrélées.

Définition 14. Soit $\rho \in [0,1]$. Si $x \in \{-1,1\}^n$ est fixé, si y est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}^n$, on dira que $y = (y_1,\ldots,y_n)$ est ρ-corrélé à x, et on notera $y \sim N_\rho(x)$ si les couples (x_i, y_i) sont mutuellement indépendants et si pour tout $i \in [n]$, y_i prend la valeur x_i avec probabilité ρ, ou une valeur aléatoire dans $\{-1,1\}$ choisie uniformément avec probabilité $1-\rho$. On peut étendre la notation à tout $\rho \in [-1,1]$ en exigeant :

$$\mathbb{P}(y_i = x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho, \quad \mathbb{P}(y_i = -x_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho.$$

On dira de deux vecteurs aléatoires x et y qu'ils sont ρ-corrélés si $x \sim \sigma_n$ et $y \sim N_\rho(x)$.

Précisons pourquoi lorsque $\rho \geq 0$ les deux définitions sont équivalentes. En effet, soient x et y deux vecteurs aléatoires ρ corrélées selon la première définition. Alors, pour $i \in [n]$, y_i prend directement la valeur x_i avec probabilité ρ. Si elle ne la prend pas directement, x_i valant 1 ou -1, y_i prend la valeur x_i avec une probabilité $\frac{1-\rho}{2}$. Au total, on retrouve bien

$$\mathbb{P}(y_i = x_i) = \rho + \frac{1-\rho}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho.$$

On trouve la valeur de $\mathbb{P}(y_i = -x_i)$ par $\mathbb{P}(y_i = x_i) + \mathbb{P}(y_i = -x_i) = 1$. Énonçons une caractérisation utile de ces variables.

Proposition 10. *Soient x et y deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}^n$. Alors x et y sont ρ-corrélés si et seulement si les couples (x_i, y_i) sont mutuellement indépendants et si chaque couple (x_i, y_i) vérifie $\mathbb{E}[x_i] = \mathbb{E}[y_i] = 0$ et $\mathbb{E}[x_i y_i] = \rho$.*

Preuve. On suppose que x et y sont ρ-corrélés. Tout d'abord, les (x_i, y_i) sont indépendants par rapport à i. Soit $i \in [n]$. x est uniforme dans $\{-1,1\}^n$ donc clairement $\mathbb{E}[x_i] = 0$. De plus, en utilisant les probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_i] &= \mathbb{P}[y_i = 1] - \mathbb{P}[y_i = -1] \\
&= \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = x_i] + \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = -x_i] - \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = -x_i] - \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = x_i] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}[y_i = x_i | x_i = 1] + \mathbb{P}[y_i = -x_i | x_i = -1] - \mathbb{P}[y_i = -x_i | x_i = 1] - \mathbb{P}[y_i = x_i | x_i = -1]\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Et en utilisant les probabilités conditionnelles à nouveau,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x_i y_i] &= \mathbb{P}[x_i y_i = 1] - \mathbb{P}[x_i y_i = -1] r \\
&= \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = x_i] + \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = x_i] - \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = -x_i] - \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = -x_i] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho\right)\right) = \rho.
\end{aligned}$$

On suppose désormais que les (x_i, y_i) sont indépendants par rapport à i et que $\mathbb{E}[x_i] = \mathbb{E}[y_i] = 0$, $\mathbb{E}[x_i y_i] = \rho$. Comme $\mathbb{E}[x_i] = \mathbb{E}[y_i] = 0$ on obtient

$$\mathbb{P}[y_i = x_i] = \mathbb{P}[y_i = x_i, x_i = 1] + \mathbb{P}[y_i = x_i, x_i = -1]$$

et

$$\mathbb{P}[y_i = -x_i] = \mathbb{P}[y_i = -x_i, x_i = 1] + \mathbb{P}[y_i = -x_i, x_i = -1].$$

Par l'expression de $\mathbb{E}[x_i y_i]$ donnée ci-dessus,

$$\mathbb{P}[y_i = x_i] - \mathbb{P}[y_i = -x_i] = \mathbb{E}[x_i y_i] = \rho. \tag{7}$$

Or,

$$\mathbb{P}[y_i = x_i] + \mathbb{P}[y_i = -x_i] = 1. \tag{8}$$

Donc en combinant (7) et (8) on obtient le résultat voulu. $\square$

Définissons la notion de stabilité au bruit, qui mesure la réponse du système de vote quand l'enregistrement est brouillé.

Définition 15. Soient $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $\rho \in [-1,1]$. Alors la stabilité au bruit de f par rapport à ρ est

$$\mathrm{Stab}_\rho[f] = \mathbb{E}_{x,y\,\rho-\text{corrélées}}[f(x)f(y)].$$

Remarque 9. Cette quantité mesure bien la réponse du système de vote. En effet, pour $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_\rho[f] &= \mathbb{P}_{x,y\,\rho\,\text{corrélées}}[f(x) = f(y)] - \mathbb{P}_{x,y\,\rho\,\text{corrélées}}[f(x) \neq f(y)] \\ &= 2\mathbb{P}_{x,y\,\rho\,\text{corrélées}}[f(x) = f(y)] - 1.\end{aligned}$$

On peut également définir l'opérateur de bruit, qui sera étudié dans la partie 4 :

Définition 16 (Opérateur de bruit de paramètre ρ)**.** Soit $\rho \in [-1,1]$. L'opérateur de bruit de paramètre ρ est l'application $T_\rho : \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$ telle que :

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n},\ \forall x \in \{-1,1\}^n,\ T_\rho f(x) = \mathbb{E}_{y\sim N_\rho(x)}\left[f(y)\right].$$

Justifions l'appellation "opérateur" :

Proposition 11. *Soit $\rho \in [-1,1]$.*

1. *T_ρ est linéaire.*
2. *Les w_S sont vecteurs propres de T_ρ. En particulier, T_ρ est auto-adjoint car diagonalisable en base orthonormée.*
3. *Pour $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la transformée de* Fourier *de $T_\rho f$ est la suivante :*

$$T_\rho f = \sum_{S\subseteq[n]} \rho^{|S|}\widehat{f}(S)w_S.$$

Preuve. La linéarité est claire. Montrons le point 2. Pour $S \subseteq [n]$ et $x \in \{-1,1\}^n$, en utilisant l'indépendance des y_i,

$$T_\rho w_S(x) = \mathbb{E}_{y\sim N_\rho(x)}\left[\prod_{i\in S} y_i\right] = \prod_{i\in S}\mathbb{E}_{y\sim N_\rho(x)}[y_i] = \prod_{i\in S}\rho x_i = \rho^{|S|}w_S(x).$$

Ce qui prouve bien que les w_S sont des vecteurs propres pour T_ρ, qui diagonalise donc en base orthonormée, et est ainsi auto-adjoint. Le point 3. découle directement de l'identité $T_\rho w_S = \rho^{|S|}w_S$ et de la linéarité de T_ρ. □

On peut avoir une expression explicite d'une stabilité :

Proposition 12. *Soient $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $\rho \in [-1,1]$. Alors*

1. *Le lien entre stabilité au bruit et opérateur de bruit est le suivant :*

$$\mathrm{Stab}_\rho[f] = \langle f, T_\rho f\rangle$$

2. $$\mathrm{Stab}_\rho[f] = \sum_{S\subseteq[n]} \rho^{|S|}\widehat{f}(S)^2 = \sum_{k=0}^{n} \rho^k w^k[f].$$

Preuve.
1) En effet,

$$\mathrm{Stab}_\rho[f] = \mathop{\mathbb{E}}_{x\sim\sigma_n, y\sim N_\rho(x)}[f(x)f(y)] = \mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}\left[f(x)\mathbb{E}_{y\sim N_\rho(x)}[f(y)]\right] = \mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}\left[f(x)T_\rho f(x)\right] = \langle f, T_\rho f\rangle.$$

2) Conséquence directe de 1) et de l'expression de la transformée de Fourier de $T_\rho f$ donnée en 11. □

3.5 Vote de Condorcet, paradoxe et théorème de Arrow

On a vu que dans le cas d'une élection à deux candidats, seule la Majorité respecte le plus de très bons critères. On va maintenant utiliser les outils mis en place pour essayer d'accéder à de nouvelles techniques de votes, où l'on peut prendre plus de candidat en compte.

Remarque 10. Dans cette section, nous considèrerons seulement des élections où trois candidats sont à départager.

On peut faire correspondre cette envie avec ce qu'a proposé Condorcet en 1785 dans son *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.* Il présentait un système de vote où au lieu de dire celui des trois candidats A, B, C qu'il préfère, chaque votant range les candidats dans un ordre décroissant, ce que l'on peut obtenir par trois votes par dichotomie, pour chaque alternative A vs B, B vs C et C vs A, en supposant que chaque votant choisi de manière rationnelle, i.e. s'il préfère A à B et B à C alors il préfère A à C. Une fois les bulletins récupérés, par la conviction de Condorcet [2] qu'un choix préféré à tout autre choix doit être élu, le "vainqueur de Condorcet" est le candidat qui est toujours préféré à un autre :

Définition 17. Parmis trois candidats A, B et C, on dira (par exemple) que A est un vainqueur de Condorcet si l'on considère que A est préféré à B, et préféré à C.

L'avantage de ce système est d'indiquer des degrés de préférence pour chaque votant et d'éviter un vote binaire où le pouvoir du votant s'incarne en un candidat. Par exemple, en France, nous sommes particulièrement confrontés à la notion de "vote utile" qui est une conséquence directe de ce système binaire. Seulement, rien n'assure qu'il existe un vainqueur de Condorcet et pire encore, il existe des situations où chaque candidat est un vainqueur de Condorcet, ce qui rend le résultat totalement irrationnel. Ce phénomène est le paradoxe de Condorcet. Exhibons le concrètement : supposons que trois personnes doivent voter parmis Riri, Fifi et Loulou et qu'on les votes soient les suivants :

			Mr.1	Mr.2	Mr.3
Riri	vs	Fifi	Riri	Fifi	Riri
Fifi	vs	Loulou	Fifi	Fifi	Loulou
Riri	vs	Loulou	Riri	Loulou	Loulou

Ici, en récupérant les votes on peut constater le paradoxe. En effet, en regardant ligne par ligne, on peut dire : Riri est préféré à Fifi, Fifi est préféré à Loulou, Loulou est préféré à Riri, on obtient donc une boucle, il est impossible de trancher.

Ici, pour interpréter les suffrages, on s'est servi de la majorité ligne par ligne. Or, on sait désormais qu'il est possible d'utiliser d'autres règles de vote que la majorité, on peut alors se demander comment un vote de Condorcet est modifié en utilisant d'autres règles de vote et si l'on parvient ou non à contourner le paradoxe. On dira qu'un résultat est rationnel s'il existe un unique vainqueur de Condorcet, irrationnel sinon.

Concrètement, nous opérerons ainsi : on suppose devoir trancher à nouveau entre Riri, Fifi et Loulou. Prenons n votants et une règle de vote $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. On obtient les préférence sur face à face de chaque votant : (Riri vs Fifi)/ (Fifi vs Loulou)/ (Loulou vs Riri). Si le votant préfère celui de gauche on traduit ce choix par 1 et s'il préfère l'autre, -1. Les avis totaux sur (Riri vs Fifi) (resp. (Fifi vs Loulou), resp. (Loulou vs Riri)) sont répertoriés dans un n-uplet $x \in \{-1,1\}^n$ (resp. y, resp. z). La fonction f décide alors du vainqueur global de chaque face à face (1 s'il sagit de celui de gauche, -1 pour l'autre). La décision finale se traduit alors en un triplet $(f(x), f(y), f(z))$. Le protocole s'explique dans ce tableau :

(1)	(-1)		Mr.1	Mr.2	Mr.3		Décision
Riri	Fifi	$x = ($	1	$,-1$	$,1$	$,\dots) \in \{-1,1\}^n$	$f(x) \in \{-1,1\}$
Fifi	Loulou	$y = ($	-1	$,1$	$,-1$	$,\dots) \in \{-1,1\}^n$	$f(y) \in \{-1,1\}$
Loulou	Riri	$z = ($	1	$,-1$	$,-1$	$,\dots) \in \{-1,1\}^n$	$f(z) \in \{-1,1\}$

Par exemple, un triplet final $(f(x), f(y), f(z)) = (1,1,-1)$ équivaut à "Riri > Fifi > Loulou" donc à une victoire de Riri. En revanche, un triplet final $(f(x), f(y), f(z)) = (1,1,1)$ siginifie : "Riri > Fifi > Loulou > Riri" et le résultat est donc irrationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas désigner d'élu, même si chaque votant possède ses préférences. On s'est demandé s'il était possible de contourner le paradoxe. Le théorème de Arrow donne une réponse exacte et troublante à cette question : éviter le paradoxe revient à ne prendre l'avis que d'une seule personne, un "dictateur".

Théorème 3 (Arrow,1950)**.** *Soit $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ une règle de vote. S'il existe toujours un vainqueur de* Condorcet *par f, alors $f = w_i$ ou $f = -w_i$ pour un certain $i \in [n]$. De plus, si f est unanime (Cf définition 8), $f = w_i$.*

Remarque 11. On obtiendra en section 4.3, par le théorème FKN, une version "quantifiée" Arrow.

On va d'abord obtenir la probabilité qu'il y ait un vainqueur par f. On se place dans l'hypothèse que l'opinion des votants est uniforme et indépendant de celui des autres.

Théorème 4. *Dans un vote de* Condorcet *par la règle de vote $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, la probabilité d'obtenir un gagnant est*
$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f].$$

Preuve. Soient $x, y, z \in \{-1,1\}^n$ les variables aléatoires suivant les votes concernans les différents face à face comme expliqués ci-dessus.

Remarque 12 (Traduction mathématique des hypothèses sur les votants)*.* On rappelle que sous les hypothèses que les votants soumettent un vote rationnel et qu'ils choisissent de manière uniforme et indépendante, les composantes x_i, y_i, z_i ne sont pas toutes égales (il y a donc six valeurs possibles) et sont des variables aléatoires uniformes indépendantes entre elles (par rapport à i).

Il y a un gagnant de Condorcet si et seulement si les trois quantités $f(x)$, $f(y)$ et $f(z)$ ne sont pas toutes égales. Soit $H = \mathbf{1}_{\{-1,1\}^3 \setminus \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}}$, qui renvoie 1 si et seulement si les composantes du vecteur en argument ne sont pas toutes égales. Alors, si on note C l'évènement : "il existe un vainqueur de CONDORCET",

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[C] &= \mathbb{P}\left[\big(f(x), f(y), f(z)\big) \notin \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}\right] = \mathbb{P}\left[H\big(f(x), f(y), f(z)\big) = 1\right] \\ &= \mathbb{E}\left[H\big(f(x), f(y), f(z)\big)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

On cherche la transformée de FOURIER de cette fonction. Tout d'abord, H est clairement impaire, ce qui apporte l'égalité suivante :

$$\sum_{S\subseteq[3]} \widehat{H}(S) w_S = \sum_{S\subseteq[3]} \widehat{H}(S)(-1)^{|S|} w_S,$$

i.e.

$$\widehat{H}(1)w_1 + \widehat{H}(2)w_2 + \widehat{H}(3)w_3 + \widehat{H}(\{1,2,3\})w_{\{1,2,3\}} = 0.$$

Donc par unicité des coefficients de FOURIER,

$$\widehat{H}(1) = \widehat{H}(2) = \widehat{H}(3) = \widehat{H}(\{1,2,3\}) = 0.$$

Ensuite,

$$\widehat{H}(S) = \langle H, w_S\rangle = \frac{1}{2^3}\sum_{x\in\{-1,1\}^3} H(x) w_S(x) = \frac{1}{8}\sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} w_S(x).$$

Soit $S \subseteq [3]$. Si $S = \emptyset$, alors

$$\widehat{H}(S) = \frac{1}{8}\sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} 1 = \frac{2^3-2}{8} = \frac{3}{4}.$$

Si $|S| = 2$, alors $w_S = w_{\{i,j\}}$ pour certains $i, j \in [n]$. H étant invariante par permutation des coordonnées (symétrique), on peut supposer que $i = 1$, $j = 2$, alors, $\widehat{H}(S)$ est la quantité :

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3,\,(x_i,x_j)=(1,1)\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} 1 - \sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3,\,(x_i,x_j)=(1,-1)\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} 1 - \sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3,\,(x_i,x_j)=(-1,1)\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} 1 + \sum_{\substack{x\in\{-1,1\}^3,\,(x_i,x_j)=(-1,-1)\\ x\neq(1,1,1),(-1,-1,-1)}} 1}{8}$$

$$= \frac{1-2-2+1}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Alors la transformée de FOURIER de H est la suivante :

$$H = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}w_1w_2 - \frac{1}{4}w_1w_3 - \frac{1}{4}w_2w_3,$$

ainsi par (9),

$$\mathbb{P}[C] = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(x)f(y)] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(x)f(z)] - \frac{1}{4}\mathbb{E}[f(y)f(z)]. \tag{10}$$

L'expression évoque presque tout de suite des stabilités au bruit (voir 15). On va donc se servir de la proposition 10 pour vérifier que les variables x_i, y_i et z_i sont deux-à-deux ρ-corrélées pour un certain ρ. En effet, par la remarque 12, pour $i \in [n]$ fixé,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x_iy_i] &= \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = 1] - \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = 1] - \mathbb{P}[x_i = 1, y_i = -1] + \mathbb{P}[x_i = -1, y_i = -1] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, $\mathbb{E}[x_i z_i] = -\frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}[y_i z_i] = -\frac{1}{3}$. Par la remarque 12, les x_i, y_i et z_i sont uniformément distribuées sur $\{-1,1\}$: $\mathbb{E}[x_i] = \mathbb{E}[y_i] = \mathbb{E}[z_i] = 0$, donc on vérifie bien d'après 10 que x_i, y_i et z_i sont deux-à-deux $\left(-\frac{1}{3}\right)$-corrélées. De fait,

$$\mathbb{E}[f(x)f(y)] = \mathbb{E}[f(x)f(z)] = \mathbb{E}[f(y)f(z)] = \mathrm{Stab}_{-1/3}[f]. \tag{11}$$

Donc en combinant (10) et (11),

$$\mathbb{P}[C] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f]. \tag{12}$$

□

Ce théorème en tête, on va pouvoir démontrer le théorème de Arrow :

Preuve. [Du théorème de Arrow] D'après le théorème 4, supposer qu'il existe toujours un gagnant de Condorcet revient à exiger

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f] = 1,$$

donc d'après 12,

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k W^k[f]\right) = 1,$$

Or, pour tout $k \neq 1$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^k > -\frac{1}{3}$ donc s'il existe $k \neq 1$ tel que $W^k[f] > 0$, alors

$$-\frac{3}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k W^k[f]\right) < \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} W^k[f] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[f^2] = \frac{1}{4}$$

ce qui est absurde.

Donc $W^k[f] = 0$ pour tout $k \neq 1$, ainsi f est linéaire. Par la proposition 4, $f = \pm w_i$ pour un certain $i \in [n]$. Si l'on suppose que f est unanime, alors $f = w_i$. □

On va maintenant estimer les probabilités d'avoir un gagnant de Condorcet. On a tout de suite un corrolaire du théorème 4 :

Corollaire 1. *Dans un vote de* Condorcet *à trois candidats par la règle de vote* $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$*, la probabilité d'obtenir gagnant de* Condorcet *est majorée par* $\frac{7}{9} + \frac{2}{9}W^1[f]$*.*

Preuve. On sait du théorème 4 que cette probabilité est de $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f]$, c'est-à-dire qu'elle vaut

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k W^k[f] &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}W^0[f] + \frac{1}{4}W^1[f] - \frac{1}{12}W^2[f] + \frac{3}{4}\sum_{k=3}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k W^k[f] \\
&\leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}W^1[f] + \frac{3}{4}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k W^k[f] \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}W^1[f] + \frac{3}{4\times 27}\left(W^0[f] + W^2[f] + \sum_{k=3}^{n} W^k[f]\right) \\
&\leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}W^1[f] + \frac{1}{36}(1 - W^1[f]) \leq \frac{7}{9} + \frac{2}{9}W^1[f].
\end{aligned}$$

□

Remarque 13. Cette quantité est atteinte : si $W^1[f] = 1$, c'est-à-dire que f est linéaire, alors f est un dictateur ou un contre-dictateur et dans ce cas, la probabilité d'obtenir un gagnant de CONDORCET est de 1. D'autre part, comme $W^1[f] = 1$, alors $\frac{7}{9} + \frac{2}{9}W^1[f] = 1$ donc la majoration est atteinte.

On peut combiner ce corrolaire avec la proposition suivante :

Proposition 13. *Si $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ est telle que pour tout $i, j \in [n]$, $\widehat{f}(i) = \widehat{f}(j)$, alors $W^1[f] \leq \dfrac{2}{\pi} + O(n^{-1/2})$.*

Preuve. Si f a tous ses coefficients de niveau 1 égaux, alors $I[f] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \widehat{f}(i) = n\widehat{f}(1)$. Or, d'après la proposition 9, $I[f] \leq \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} + O\left(n^{-1/2}\right)$, on obtient donc :

$$\widehat{f}(1) \leq \sqrt{\frac{2}{n\pi}} + O\left(n^{-3/2}\right).$$

Comme $W^1[f] = n\widehat{f}(1)^2$, alors

$$W^1[f] \leq n\left(\sqrt{\frac{2}{n\pi}} + O\left(n^{-3/2}\right)\right)^2 = n \times \frac{2}{n\pi}\left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right) = \frac{2}{\pi} + O(n^{-1/2}).$$

□

On peut donc énoncer :

Théorème 5. *Soit $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ qui possède tous ses coefficients de Fourier de degré 1 égaux. Alors la probabilité qu'il y ait un gagnant de* CONDORCET *par f dans un vote de* CONDORCET *à 3 candidats est majorée par $\dfrac{7}{9} + \dfrac{4}{9\pi} + O(n^{-1/2}) \approx 0,919$.*

Penchons nous sur le cas de la majorité. On va d'abord montrer le théorème suivant dont on voit tout de suite l'utilité, en le combinant avec le théorème 4,

Théorème 6. *Soit $\rho \in [-1,1]$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty,\, n \text{ impair}} \mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n] = \frac{2}{\pi}\arcsin\rho = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\rho.$$

Preuve. [Du théorème 6] Soit $\rho \in [-1,1]$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et x, y deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}^n$ ρ-corrélés.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n] &= \mathbb{E}[\mathrm{Maj}_n(x)\mathrm{Maj}_n(y)] = \mathbb{E}[\mathit{signe}(x_1 + \cdots + x_n)\mathit{signe}(y_1 + \cdots + y_n)] \\
&= \mathbb{P}[\mathit{signe}(x_1 + \cdots + x_n) = \mathit{signe}(y_1 + \cdots + y_n)] - \mathbb{P}[\mathit{signe}(x_1 + \cdots + x_n) = -\mathit{signe}(y_1 + \cdots + y_n)] \\
&= 2\mathbb{P}[\mathit{signe}(x_1 + \cdots + x_n) = \mathit{signe}(y_1 + \cdots + y_n)] - 1 \\
&= 2\mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_n \geq 0, y_1 + \cdots + y_n \geq 0] + 2\mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_n \leq 0, y_1 + \cdots + y_n \leq 0] - 1.
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_n \geq 0, y_1 + \cdots + y_n \geq 0] = \mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_n \leq 0, y_1 + \cdots + y_n \leq 0]$, donc

$$\mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n] = 4\mathbb{P}[x_1 + \cdots + x_n \leq 0, y_1 + \cdots + y_n \leq 0] - 1. \tag{13}$$

L'idée est qu'on reconnait la fonction de répartition d'une somme de vecteurs aléatoires, un "$F_{S_n}(0,0)$". C'est idéal car on veut obtenir un résultat de convergence : quand il y a convergence en loi, la fonction de répartition converge simplement là où la fonction de répartition de la limite en loi est continue. La convergence en loi de sommes de vecteurs aléatoires est couverte par le théorème de la limite central multidimensionnel. Il est naturel alors de remplacer (13) par

$$\mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n] = 4\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i \leq 0, \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^n y_i \leq 0\right] - 1. \tag{14}$$

On va alors nommer

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Appliquons le théorème de la limite centrale multidimensionnel . Tout d'abord,

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \mathbb{E}[x_i] \\ \mathbb{E}[y_i] \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 10, la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ est la $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. On suppose donc pour le moment que $|\rho| \neq 1$ de sorte que cette matrice soit inversible. On peut utiliser le théorème de la limite centrale multidimensionnel :

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \sim \mathscr{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right). \tag{15}$$

Z est un vecteur gaussien, donc est à densité. Ainsi, la fonction de répartition de Z, $(t_1, t_2) \mapsto \mathbb{P}[Z_1 \leq t_1, Z_2 \leq t_2]$ est continue. Donc par (14) et par la convergence en loi établiee en (15),

$$\mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n] = 4\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i \leq 0, \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^n y_i \leq 0\right] - 1 \xrightarrow[n\to+\infty,\, n\,\text{impair}]{} 4\mathbb{P}[Z_1 \leq 0, Z_2 \leq 0] - 1. \tag{16}$$

On va devoir montrer la formule de SHEPPARD :

$$\mathbb{P}[Z_1 \leq 0, Z_2 \leq 0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\arccos\rho}{2\pi}. \tag{17}$$

En admettant ce résultat, on aura terminé la preuve du théorème en l'injectant dans (16). Pour prouver la formule de SHEPPARD on va se servir du lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\rho = \cos\theta$. On note $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ avec $g_1, g_2 \sim \mathscr{N}_2(0,1)$ indépendantes. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, alors*

$$Z \overset{\mathscr{L}}{=} \begin{pmatrix} \vec{u}\cdot\vec{g} \\ \vec{v}\cdot\vec{g} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Posons $w_1 = \vec{u}\cdot\vec{g} = g_1$ et $w_2 = \vec{v}\cdot\vec{g} = \cos\theta g_1 + \sin\theta g_2$ Il faut montrer que $w_1, w_2 \sim \mathscr{N}(0,1)$ et que $\mathrm{Cov}(w_1, w_2) = \mathbb{E}[w_1 w_2] = \rho = \cos\theta$. Clairement,

$$\mathbb{E}[w_1] = \mathbb{E}[w_2] = 0 \quad \text{et}\, \mathrm{Var}[w_1] = \mathrm{Var}[g_1] = 1.$$

Montrons que $\mathrm{Var}[w_2]=1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[w_2] &= \mathrm{Var}[\cos\theta g_1+\sin\theta g_2] = \mathrm{Var}[\cos\theta g_1]+\mathrm{Var}[\sin\theta g_2]+2\mathrm{Cov}[\cos\theta g_1,\sin\theta g_2]\\ &= \cos^2\theta\mathrm{Var}[g_1]+\sin^2\theta\mathrm{Var}[g_2]+2\cos\theta\sin\theta\mathrm{Cov}[g_1,g_2],\end{aligned}$$

mais comme g_1 et g_2 sont centrées réduites on peut simplifier par

$$\mathrm{Var}[w_2]=1+2\cos\theta\sin\theta\mathbb{E}[g_1g_2]. \tag{18}$$

Or,

$$\mathbb{E}[g_1g_2]=\int_{\mathbb{R}^2} xyf_{g_1}(x)f_{g_2}(y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}ye^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

Or on calcule l'intégrale de deux fonction impaires sur $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{E}[g_1g_2]=0$ et par (18)

$$\mathrm{Var}[w_2]=1$$

On vérifie bien que $w_1,w_2\sim\mathscr{N}(0,1)$. Montrons pour finir que $\mathbb{E}[w_1w_2]=\rho$. En effet,

$$\mathbb{E}[w_1w_2]=\mathbb{E}[g_1(\cos\theta+\sin\theta g_2)]=\cos\theta=\rho.$$

□

Le lemme est prouvé, on va pouvoir montrer la formule de Sheppard. On cherche à calculer

$$\mathbb{P}[Z_1\le 0,Z_2\le 0]=\mathbb{P}[\vec{u}\cdot\vec{g}\le 0,\ \vec{v}\cdot\vec{g}\le 0]. \tag{19}$$

On montre que

$$(\vec{u}\cdot\vec{g}\le 0,\ \vec{v}\cdot\vec{g}\le 0)=(\vec{g}\in\mathscr{D})$$

où $\mathscr{D}=\left\{(r\cos\varphi,r\sin\varphi);\ r\ge 0,\varphi\in\left[\frac{\pi}{2}+\theta,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$. Or g_1 et g_2 étant indépendantes, $\vec{g}$ est à densité, doneé par $f_{\vec{g}}=f_{g_1}f_{g_2}$. On peut alors calculer, avec un changement de variables polaires,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\vec{u}\cdot\vec{g}\le 0,\ \vec{v}\cdot\vec{g}\le 0]=\mathbb{P}[\vec{g}\in\mathscr{D}]&=\int_{\mathscr{D}} f_{\vec{g}}(x,y)dxdy=\int_{r=0}^{r=+\infty}\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2\cos^2\theta}{2}}e^{-\frac{r^2\sin^2\theta}{2}}rdrd\theta\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\left[\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta}^{\varphi=\frac{3\pi}{2}}d\theta\right]drr=\frac{\pi-\theta}{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\frac{\pi-\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\theta}{\pi}\end{aligned} \tag{20}$$

Comme $\theta\in[0,\pi]$ et que $\rho\in]-1,1[$, alors $\theta=\arccos\rho$. On a bien en combinant (19) et (20), on a le résultat qu'on voulait :

$$\mathbb{P}[Z_1\le 0,Z_2\le 0]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\arccos\rho}{\pi}.$$

Et la preuve du théorème est terminée. □

On obtient ensuite directement le théorème suivant :

Théorème 7 (Formule de Guilbaud)**.** *Dans un vote de condorcet à 3 candidats utilisant la majorité* Maj_n*, la probabilité d'obtenir un gagnant par condorcet tend, quand n tends vers ∞, vers*

$$\frac{3}{2\pi}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx 0.912.$$

Remarque 14. Quand on prend l'avis d'un grand nombre de personnes par un vote de CONDORCET par majorité, il y a une faible mais non négligeable chance que le vote n'aboutisse pas. Il serait intéressant également de pouvoir un peu mieux quantifier en étudiant la vitesse de convergence de la suite $(\mathrm{Stab}_\rho[\mathrm{Maj}_n])$.

Remarque 15. On se rend alors compte, en comparant les théorèmes 5 et 7, que la majorité optimise à nouveau le problème. L'hypothèse faite dans le théorème 5 correspondent à une propriété souhaitable pour un système de vote : par exemple si une règle de vote est symétrique, tous les coefficients de dégré 1 sont égaux. Egalement si une règle de vote est monotone, demander que tous les coefficients de degré 1 soient égaux revient à donner la même influence à toute la population. La majorité permet donc d'éviter au mieux le paradoxe de Condorcet, en approchant de la valeur maximale possible de la probabilité d'obtention d'un gagnant de Condorcet.

4 Opérateur de bruit et hypercontractivité

4.1 Hypercontractivité

Proposition 14. *La famille $(T_\rho)_{\rho\in[-1,1]}$ est un semi-groupe d'opérateurs : $T_1 = Id_{\mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}}$ et pour tous $\rho_1, \rho_2 \in [-1,1]$, $T_{\rho_1\rho_2} = T_{\rho_1}T_{\rho_2}$.*

Preuve. En effet, pour toute $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$T_1 f = \sum_{S\subseteq[n]} 1^{|S|}\widehat{f}(S)w_S = \sum_{S\subseteq[n]} \widehat{f}(S)w_S = f$$

et pour tous $\rho_1, \rho_2 \in [-1,1]$, pour $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T_{\rho_1}T_{\rho_2}(f) = \sum_{S\subseteq[n]} \rho_1^{|S|}\widehat{T_{\rho_2}f}(S)w_S = \sum_{S\subseteq[n]} \rho_1^{|S|}\rho_2^{|S|}\widehat{f}(S)w_S = T_{\rho_1\rho_2}(f).$$

$\square$

Remarque 16. Pour $\rho \in [0,1]$, une autre notation pour T_ρ est utilisée : pour reconnaitre un semi-groupe d'opérateurs additif, on note $P_t = T_{e^{-t}}$ où $t \geq 0$ est tel que $\rho = e^{-t}$. Ainsi le semi-groupe d'opérateurs multiplicatif $(T_\rho)_{\rho\in[0,1]}$ devient le semi-groupe d'opérateurs additif $(P_t)_{t\geq 0}$.

On observe une propriété de contractivité des opérateurs T_ρ.

Proposition 15. *Soit $p \geq 1$. Pour tout $\rho \in [-1,1]$, T_ρ est 1-contractante sur $L^p(\{-1,1\}^n)$:*

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n},\ ||T_\rho f||_p \leq ||f||_p$$

Preuve. Soit $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Tout d'abord,

$$||T_\rho f||_p^p = \mathop{\mathbb{E}}_{x\sim\mathscr{U}_{\{-1,1\}}}[|T_\rho f(x)|^p] = \sum_{x\in\{-1,1\}^n} |T_\rho f(x)|^p \frac{1}{2^n}.$$

Or, pour $x \in \{-1,1\}^n$,

$$|T_\rho f(x)| \leq T_\rho|f|(x)$$

car par inégalité triangulaire,

$$|T_\rho f(x)| = \left| \mathop{\mathbb{E}}_{y\sim \mathcal{N}_\rho(x)} [f(y)] \right| \leq \mathop{\mathbb{E}}_{y\sim \mathcal{N}_\rho(x)} [|f(y)|] = T_\rho |f|(x).$$

Donc, par croissance de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$||T_\rho f||_p^p \leq \sum_{x\in\{-1,1\}^n} T_\rho |f|(x)^p \frac{1}{2^n} = \sum_{x\in\{-1,1\}^n} \left(\sum_{k=0}^n \rho^k |f|^{=k}(x) \right)^p \frac{1}{2^n}.$$

Or, pour tout $0 \leq k \leq n$, $\rho^k |f|^{=k}(x) \leq |f|^{=k}(x)$, car $-1 \leq \rho \leq 1$. Ainsi,

$$||T_\rho f||_p^p \leq \sum_{x\in\{-1,1\}^n} \left(\sum_{k=0}^n |f|^{=k}(x) \right)^p \frac{1}{2^n} = \sum_{x\in\{-1,1\}^n} |f|(x)^p \frac{1}{2^n} = ||f||_p^p.$$

□

Rappelons que les normes L^p sont ici croissantes : en effet par l'inégalité de Hölder, si $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$, alors si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$,

$$||f||_p^p = \int_{\{-1,1\}^n} |f|^p d\sigma_n \leq \left(\int_{\{-1,1\}^n} |f|^{p\frac{q}{p}} d\sigma_n \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\{-1,1\}^n} 1^{\frac{p}{p-q}} d\sigma_n \right)^{\frac{p-q}{p}} = ||f||_q^p.$$

Ainsi, si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, si $T : \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$ est un opérateur contractif sur $L^p(\{-1,1\}^n)$, $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$, alors

$$||Tf||_p \leq ||f||_p \leq ||f||_q.$$

C'est pourquoi la propriété de contractivité sur $L^p(\{-1,1\}^n)$ permet directement d'obtenir une propriété de contraction de $L^q(\{-1,1\}^n)$ dans $L^p(\{-1,1\}^n)$ quand $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. On va désormais définir une notion d'hypercontractivité qui améliore l'inégalité obtenue, en donnant l'inégalité de contraction de L^p dans L^q.

Définition 18 (Hypercontractivité pour les opérateurs)**.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable quelconque et $T : L^p(X, \mathscr{A}, \mu) \longrightarrow L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$ un opérateur. On dit que T est (p, q)-hypercontratif (le (p, q) est facultatif s'il est sous-entendu) si pour toute fonction $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$,

$$||Tf||_q \leq ||f||_p.$$

Cette notion est liée à celle de semi-groupe d'opérateurs, on le verra dans la preuve du théorème d'hypercontractivité (théorème 8) présentée plus tard. L'objectif va être désormais de montrer le théorème d'hypercontractivité suivant :

Théorème 8 (d'Hypercontractivité)**.** *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Alors pour $0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$, T_ρ est hypercontractif. Autrement dit, pour toute $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$,*

$$||T_\rho f||_q \leq ||f||_p.$$

On va prouver ce théorème en plusieurs étapes, en le montrant d'abord pour $n = 1$ puis en procédant par récurrence pour arriver à n quelconque. Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Remarque 17. On verra plus tard, en proposition 16, qu'il suffit de montrer l'inégalité pour $\rho = \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$. On fera donc l'hypothèse dans la preuve que ρ vaut $\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$. On verra également en proposition 16 que c'est le meilleur indice possible pour obtenir l'hypercontractivité.

4.1.1 Preuve à n = 1

On va tout de suite avoir besoin de la définition suivante, éclaircie dans la remarque 18 ci-dessous.

Définition 19 (Hypercontractivité pour les variables aléatoires)**.** Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $0 \leq \rho < 1$. Soit X une variable aléatoire avec $||X||_q < \infty$. On dit que X est (p, q, ρ)-hypercontractive si :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ ||a + \rho b X||_q \leq ||a + bX||_p.$$

Remarque 18 (Remarque fondamentale). Montrer le théorème 8 dans le cas $n = 1$ équivaut à montrer que toute variable aléatoire x uniforme sur $\{-1, 1\}$ est (p, q, ρ)-hypercontractive, c'est-à-dire que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ||a + \rho b x||_q \leq ||a + bx||_p. \tag{21}$$

En effet la décomposition de Fourier d'une fonction $f : \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ est la suivante :

$$f = \sum_{S \subseteq \{1\}} \hat{f}(S) w_S = \hat{f}(\emptyset) + \hat{f}(1) w_1.$$

Donc f est de la forme $x \mapsto a + bx$ où $a, b \in \mathbb{R}$, et $T_\rho f(x) = \rho^0 f^{=0}(x) + \rho^1 f^{=1}(x) = a + \rho b x$. Or

$$||T_\rho f||_q = \mathbb{E}_{x \sim \sigma_1}(|T_\rho f(x)|^q)^{1/q} = \mathbb{E}_{x \sim \sigma_1}(|a + \rho b x|^q)^{1/q}.$$

De même,

$$||f||_p = \mathbb{E}_{x \sim \sigma_1}(|a + bx|^p)^{1/p}.$$

L'objectif est donc bien de prouver (21).

Remarque 19 (commodité). Par homogénéité des normes, pour montrer (21), il suffit de montrer pour $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$ ou pour $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$.

Remarque 20 (Rappel et notations). On va utiliser dans la suite de la preuve le développement en série entière de $(1 + t)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, valide quand $|t| < 1$. Celui-ci est le suivant :

$$(1 + t)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!} t^k.$$

On utilisera alors une notation généralisée des coefficients binomiaux en notant pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Preuve. [de (21)] Soit x une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, 1\}$. On peut supposer par la remarque 19 que $a = 1$.

Premier cas : $1 \leq p < q \leq 2$**.**

On peut supposer que $|b| < 1$ car si on obtient (21) pour $|b| < 1$, alors

— Pour $|b| > 1$, on vérifie l'inégalité voulue :

$$||1 + \rho b x||_q = |b|^2 \left|\left|1 + \rho \frac{1}{b} x\right|\right|_q \leq |b|^2 \left|\left|1 + \frac{1}{b} x\right|\right|_p = ||1 + bx||_p.$$

— Pour $|b| = 1$ on obtient l'inégalité par continuité de la norme et passage à la limite dans l'inégalité pour $|b| < 1$.

On suppose donc que $|b| < 1$. On veut montrer que

$$||1+\rho bx||_q \leq ||1+bx||_p \Longleftrightarrow ||1+\rho bx||_q^p \leq ||1+bx||_p^p \Longleftrightarrow \mathbb{E}(|1+\rho bx|^q)^{p/q} \leq \mathbb{E}(|1+bx|^p). \quad (22)$$

Or $|b| < 1$ et $\rho < 1$ donc les variables $1+\rho bx$ et $1+bx$ sont positives. D'après la formule de transfert et le développement en série entière présenté en remarque 20 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|1+\rho bx|^q)^{p/q} = \left(\frac{1}{2}(1+\rho b)^q + \frac{1}{2}(1-\rho b)^q\right)^{p/q} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{q}{k}(\rho b)^k + \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{q}{k}(-1)^k(\rho b)^k\right)^{p/q} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{q}{2k}\rho^{2k}b^{2k}\right)^{p/q} = \left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{q}{2k}\rho^{2k}b^{2k}\right)^{p/q} \end{aligned} \quad (23)$$

De même

$$\mathbb{E}(|1+bx|^p) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{p}{2k}b^{2k}. \quad (24)$$

On souhaite utiliser l'inégalité suivante : pour $0 \leq \theta \leq 1$ et $t \geq 0$, $(1+t)^\theta \leq 1 + t\theta$. Or,

$$\binom{q}{2k} = \frac{q(q-1)\dots(q-2k+1)}{2k!} = \frac{1}{(2k)!}\prod_{i=0}^{2k-1}(q-i),$$

et $1 \leq q \leq 2$ donc pour $i \geq 2$, $q - i \leq 0$, et ainsi $signe\left(\binom{q}{2k}\right) = 1 \times 1 \times (-1)^{2k-1-2+1} = 1$.

Ceci permet d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{q}{2k}\rho^{2k}b^{2k} \geq 0$$

Et ainsi, comme $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$, (on rappelle que ici $\rho = \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$)

$$\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{q}{2k}\rho^{2k}b^{2k}\right)^{p/q} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{q}\binom{q}{2k}\rho^{2k}b^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{q}\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^k\binom{q}{2k}b^{2k}. \quad (25)$$

On veut désormais montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{q}\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^k\binom{p}{2k}b^{2k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{q}{2k}b^{2k}. \quad (26)$$

Cette inégalité étant vérifiée aisément pour $p = 1$, on suppose désormais $p > 1$. Montrons que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{p}{q}\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^k\binom{q}{2k} \leq \binom{p}{2k}. \quad (27)$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^k\frac{1}{(2k)!}\prod_{i=0}^{2k-1}(q-i) \leq \frac{1}{(2k)!}\prod_{i=0}^{2k-1}(p-i) &\Longleftrightarrow \frac{1}{(q-1)^{k-1}}\prod_{i=2}^{2k-1}(q-i) \leq \frac{1}{(p-1)^{k-1}}\prod_{i=2}^{2k-1}(p-i) \\ \Longleftrightarrow \prod_{i=2}^{2k-1}\frac{q-i}{\sqrt{q-1}} \leq \prod_{i=2}^{2k-1}\frac{p-i}{\sqrt{p-1}} &\Longleftrightarrow \prod_{i=2}^{2k-1}\frac{i-q}{\sqrt{q-1}} \leq \prod_{i=2}^{2k-1}\frac{i-p}{\sqrt{p-1}}. \end{aligned}$$

On multiplie ici des quantités positives, il suffit donc de montrer l'inégalité facteur par facteur. Soit $i \geq 2$ fixé. Sur $]1,2]$, $t \mapsto \frac{i-t}{\sqrt{t-1}}$ est définie et dérivable, de dérivée $t \mapsto \frac{2-i-t}{2(t-1)^{3/2}} \leq 0$ donc y est décroissante.
Ainsi, comme $1 \leq p \leq q \leq 2$, on retrouve bien $\frac{i-q}{\sqrt{q-1}} \leq \frac{i-p}{\sqrt{p-1}}$. L'inégalité (27) est ainsi vérifiée pour tout $k \geq 1$, donc (26) également. On combine ensuite (23) avec (25), puis (25) avec (26), puis (26) avec (24). Ainsi, on vérifie bien (22) et la preuve est terminée pour ce cas.

Deuxième cas : $2 \leq p < q \leq +\infty$.

Soient p' et q' les indices conjugués de Hölder respectifs de p et de q : $p' = 1 + \frac{1}{p-1}$ et $q' = 1 + \frac{1}{q-1}$. Par décroissance du $x \mapsto 1 + \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$, on obtient d'abord $p' \geq q'$. De plus, comme $p \geq 2$, alors $1 \leq 1 + \frac{1}{p-1} \leq 2$, donc

$$1 \leq q' \leq p' \leq 2\,,$$

ce qui correspond au premier cas, qui vient d'être établi : c'est-à-dire qu'on sait que

$$\forall\, f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}, ||T_\rho f||_{p'} \leq ||f||_{q'}. \tag{28}$$

On montre d'abord par l'inégalité de Hölder pour le produit scalaire et son cas d'égalité que

$$||T_\rho f||_q = \sup_{||h||_{q'}=1} \langle h, T\rho f\rangle. \tag{29}$$

Or, T_ρ est auto-adjoint donc

$$\sup_{||h||_{q'}=1} \langle h, Tf\rangle = \sup_{||h||_{q'}=1} \langle Th, f\rangle. \tag{30}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Hölder avec q et q' puis un passage à la borne supérieure :

$$\sup_{||h||_{q'}=1} \langle Th, f\rangle \leq \sup_{||h||_{q'}=1} \langle |Th|, |f|\rangle \leq \sup_{||h||_{q'}=1} ||Th||_{p'}||f||_p. \tag{31}$$

Par (28),

$$\sup_{||h||_{q'}=1} ||Th||_{p'}||f||_p \leq \sup_{||h||_{q'}=1} ||h||_{q'}||f||_p = ||f||_p. \tag{32}$$

En combinant bout à bout (29), (30), (31) et (32), on termine la preuve.

Troisième cas : $p = q$.

Il s'agit de montrer que T_ρ est contractive, ce qui a déjà été prouvé en proposition 15.

Quatrième et dernier cas : $p < 2 < q$.

D'après le deuxième cas,

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}}, \left|\left|T_{\frac{1}{\sqrt{q-1}}} f\right|\right|_q \leq ||f||_2. \tag{33}$$

D'après le premier cas,

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}}, \left|\left|T_{\sqrt{p-1}} f\right|\right|_2 \leq ||f||_p. \tag{34}$$

On rappelle qu'est fixé $\rho = \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$. Par la propriété de semi groupe,

$$T_\rho f = T_{\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}} f = T_{\frac{1}{\sqrt{q-1}}} T_{\sqrt{p-1}} f.$$

Ainsi, par (33) et (34)

$$||T_\rho f||_q \leq \left|\left|T_{\sqrt{p-1}} f\right|\right|_2 \leq ||f||_p$$

Remarque 21. C'est ici qu'on voit bien le rapport entre semi-groupe d'opérateurs et hypercontractivité qu'on avait évoqué à l'introduction de l'hypercontractivité.

□

4.1.2 Preuve pour n quelconque

Preuve. [Théorème d'hypercontractivité version finale]
On va montrer le cas général (n quelconque) par récurrence. L'initialisation est réalisée au cas $n = 1$. On suppose maintenant que $n \geq 2$ vérifie le théorème d'hypercontractivité sur le cube discret $\{-1, 1\}^{n-1}$. Montrons que ce théorème est vrai sur le cube discret $\{-1, 1\}^n$. Soit $f : \{-1, 1\}^n \longmapsto \mathbb{R}$.

Pour arriver à une relation de récurrence, quand $x = (x_1, \ldots, x_n)$ désignera par la suite un vecteur de $\{-1, 1\}^n$ ou une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 1\}^n$, on notera $x = (x', x_n)$ où $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et x_n sont indépendantes.

$$\begin{aligned} ||T_\rho f||_q^q &= \mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}\left[|T_\rho f(x)|^q\right] \\ &= \mathbb{E}_{x\sim\sigma_{n-1}}\left[\mathbb{E}_{x_n\sim\sigma_1}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^q\right]\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Remarque 22. A partir de maintenant, jusqu'à la fin de le preuve, on allègera les notations. x' et x_n suivent une loi uniforme mais ça ne sera plus précisé. On précisera aussi en indice des normes sous quelle variable on somme.

Utilisons l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{1}{\frac{p}{q}} + \frac{1}{\frac{p}{p-q}} = 1$:

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\mathbb{E}_{x_n}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^q\right]\right] \leq \mathbb{E}_{x'}\left[\mathbb{E}_{x_n}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^{q\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}} \mathbb{E}_{x_n}\left[1^{\frac{p}{p-q}}\right]^{\frac{p-q}{q}}\right] = \mathbb{E}_{x'}\left[\mathbb{E}_{x_n}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^p\right]^{\frac{q}{p}}\right] \tag{36}$$

Alors en combinant (35) et (36), on obtient

$$||T_\rho f||_q \leq \mathbb{E}_{x'}\left[\mathbb{E}_{x_n}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^p\right]^{\frac{q}{p}}\right]^{1/q}. \tag{37}$$

Rappelons maintenant que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$,

$$f(x) = x_n D_n f(x) + E_n f(x).$$

où $E_n f$ est le n-ième opérateur d'espérance et $D_n f$ est le n-ième opérateur de dérivation discrète, introduits en 3.2. Ces deux opérateurs ne dépendant pas de la n-ième coordonneé, on note $\widetilde{E_n} f$ et $\widetilde{D_n} f$ leurs restrictions aux $n-1$ premières coordonnées. On note également $\widetilde{T_\rho}$ l'opérateur de bruit de paramètre ρ sur le cube discret $\{-1, 1\}^{n-1}$. Alors pour $x = (x', x_n) \in \{-1, 1\}^n$,

$$f(x) = x_n D_n f(x) + E_n f(x) = x_n \widetilde{D_n} f(x') + \widetilde{E_n} f(x') \tag{38}$$

et

$$T_\rho f(x) = T_\rho\left((u', u_n) \mapsto u_n \widetilde{D_n f}(u') + \widetilde{E_n f}(u')\right)(x', x_n) = \widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)(x')$$

Montrons ensuite que

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\mathbb{E}_{x_n}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^p\right]^{\frac{q}{p}}\right]^{1/q} \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p}. \tag{39}$$

Admettons momentanément ce résultat. Alors avec (37) et (39), on obtient que

$$||T_\rho f||_q \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p}.$$

On utilise ensuite (38),

$$\mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|T_\rho f(x', x_n)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p} = \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|\widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p}. \tag{40}$$

Par hypothèse de récurrence, $\widetilde{T_\rho}$ est hypercontractif. Donc, pour $x_n \in \{-1, 1\}$,

$$\left|\left|\widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)\right|\right|_{q,x'} \leq \left|\left|x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right|\right|_{p,x'}.$$

Et donc,

$$\mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|\widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p} = \mathbb{E}_{x_n}\left[\left|\left|\widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)\right|\right|_{q,x'}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\left|\left|x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right|\right|_{p,x'}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \mathbb{E}_{x_n}\left[\left(\mathbb{E}_{x'}\left[\left|x_n \widetilde{D_n f}(x') + \widetilde{E_n f}(x')\right|^p\right]^{1/p}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}_{x_n}\mathbb{E}_{x'}\left[\left|x_n \widetilde{D_n f}(x') + \widetilde{E_n f}(x')\right|^p\right]^{1/p}$$

Ainsi, d'après (38),

$$\mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[|\widetilde{T_\rho}\left(x_n \widetilde{D_n f} + \widetilde{E_n f}\right)|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{1/p} \leq ||f||_p \tag{41}$$

Il suffit ensuite de combiner (37), (39), (40) et (41) bout à bout pour conclure que T_ρ est hypercontractif :

$$||T_\rho f||_q \leq ||f||_p.$$

Pour clôturer la preuve, montrons (39). On va se servir d'un lemme :

Lemme 3. *Pour $r \geq 1$ et $g : \{-1, 1\}^n \longmapsto \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\left|\mathbb{E}_{x_n}\left[g(x', x_n)\right]\right|^r\right]^{1/r} \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}[|g(x', x_n)|^r]^{1/r}\right].$$

Preuve. En effet,

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\left|\mathbb{E}_{x_n}\left[g(x', , x_n)\right]\right|^r\right]^{1/r} = \mathbb{E}_{x'}\left[\left|\frac{1}{2}g(x', 1) + \frac{1}{2}g(x', -1)\right|^r\right]^{\frac{1}{r}}. \tag{42}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Minkowski :

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\left|\frac{1}{2}g(x', 1) + \frac{1}{2}g(x', -1)\right|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \mathbb{E}_{x'}\left[\left|\frac{1}{2}g(x', 1)\right|^r\right]^{\frac{1}{r}} + \mathbb{E}_{x'}\left[\left|\frac{1}{2}g(x', -1)\right|^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}[|g(x', x_n)|^r]^{1/r}\right]. \tag{43}$$

Et donc, en combinant (42) et (43), on prouve bien le lemme. $\square$

Comme $q \geq p \geq 1$, alors $\dfrac{q}{p} \geq 1$. Appliquons le lemme à $r = \dfrac{q}{p}$ et à $g = T_\rho f^{\frac{q}{r}} = T_\rho f^p$. On obtient

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\left|\mathbb{E}_{x_n}\left[T_\rho f(x',x_n)^{\frac{q}{r}}\right]\right|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[\left|T_\rho f(x',x_n)^{r\frac{q}{r}}\right|\right]^{\frac{1}{r}}\right]$$

C'est-à-dire :

$$\mathbb{E}_{x'}\left[\left|\mathbb{E}_{x_n}\left[T_\rho f(x',x_n)^p\right]\right|^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \leq \mathbb{E}_{x_n}\left[\mathbb{E}_{x'}\left[\left|T_\rho f(x',x_n)^q\right|\right]^{\frac{p}{q}}\right]$$

Ou encore, en passant à la puissance $\frac{1}{p}$, on a bien montré (39).

$\square$

Proposition 16. *Soient $\rho \in [0,1]$ et $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. On suppose que T_ρ est (p,q) hypercontractif. Alors :*

1. $\rho \leq \sqrt{\dfrac{p-1}{q-1}}$
2. *Pour tout $0 \leq \rho' \leq \rho$, $T_{\rho'}$ est (p,q) hypercontractif.*

Preuve.

1) Soit $f : x \in \{-1,1\}^n \mapsto 1 + bx_1$, où $|b| < 1$ de sorte que f soit à valeurs positives. Tout d'abord, $T_\rho f = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}(S)\rho^{|S|} w_S = 1 + \rho b w_1$, et ainsi,

$$||T_\rho f||_q = \mathbb{E}_{x\sim\sigma_n}[|T_\rho f(x)|^q]^{1/q} = \left(\sum_{x\in\{-1,1\}^n} \frac{1}{2^n}|1+\rho b x_1|^q\right)^{1/q}.$$

Or, il y a autant de vecteurs de $\{-1,1\}^n$ qui commencent par 1 que par -1 (il y en a 2^{n-1}), donc

$$\begin{aligned}
||T_\rho f||_q &= \left(\frac{(1+\rho b)^q}{2} + \frac{(1-\rho b)^q}{2}\right)^{1/q} \\
&\underset{b\to 0}{=} \left(\frac{1 + q\rho b + \frac{q(q-1)}{2}\rho^2 b^2 + o(b^2)}{2} + \frac{1 - q\rho b + \frac{q(q-1)}{2}\rho^2 b^2 + o(b^2)}{2}\right)^{1/q} \\
&\underset{b\to 0}{=} \left(1 + \frac{q(q-1)}{2}\rho^2 b^2 + o(b^2)\right)^{1/q} \underset{b\to 0}{=} 1 + \frac{q-1}{2}\rho^2 b^2 + o(b^2).
\end{aligned}$$

De même,

$$||f||_p \underset{b\to 0}{=} 1 + \frac{p-1}{2}b^2 + o(b^2).$$

Or T_ρ est hypercontractive donc

$$||T_\rho f||_q \leq ||f||_p.$$

et ainsi, en passant à la limite $[b \to 0]$ dans l'inégalité $\dfrac{||T_\rho f||_q - 1}{b^2} \leq \dfrac{||f||_p - 1}{b^2}$, on obtient

$$(q-1)\rho^2 \leq p-1,$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

2) Le shéma de preuve est similaire à celui de la preuve théorème d'hypercontractivité. On va d'abord prouver le cas $n = 1$ puis remonter à n quelconque par le même argument.
On utilise l'équivalence évoquée en remarque 18. Soit donc x une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrons d'abord que x est $(q, q, 0)$-hypercontractive. En vertue de la remarque 19, ne montrons que le cas $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$. Soit donc $b \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{E}[x] = 0$,

$$||1 + 0bx||_q = ||1||_q = 1 = 1 + b\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[1 + bx] \leq \mathbb{E}[|1 + bx|]. \tag{44}$$

Or, par l'inégalité de Jensen, comme $q \geq 1$, alors,

$$\mathbb{E}[|1 + bx|]^q \leq \mathbb{E}[|1 + bx|^q] = ||1 + bx||_q^q \tag{45}$$

Alors en combinant(44) et (45), on trouve donc que

$$||1 + 0bx||_q \leq ||1 + bx||_q,$$

ce qui prouve que x est $(q, q, 0)$-hypercontractive. Montrons ensuite que x est (q, q, ρ') hypercontractive pour tout $0 \leq \rho' \leq 1$. En vertue de la remarque 19, ne montrons que le cas $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $0 \leq \rho' \leq 1$,

$$||a + \rho x||_q = ||(1 - \rho)a + \rho(a + x)||_q \leq |1 - \rho||a| + \rho||a + x||_q = (1 - \rho)|a| + \rho||a + x||_q.$$

Comme x est $(q, q, 0)$-hypercontractive, alors

$$|a| = ||a||_q \leq ||a + x||_q$$

Donc

$$||a + \rho x||_q \leq (1 - \rho)||a + x||_q + \rho||a + x||_q = ||a + x||_q$$

Donc x est (q, q, ρ')-hypercontractive.
Montrons enfin que x est (p, q, ρ')-hypercontractive pour tout $0 \leq \rho' \leq \rho$ (on rappelle que ρ est fixé tel que x est (p, q, ρ)-hypercontractive). On peut supposer que $\rho \neq 0$. On vient de prouver que x est $\left(q, q, \dfrac{\rho'}{\rho}\right)$-hypercontractive, donc pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left|\left|a + \frac{\rho'}{\rho}bx\right|\right|_q \leq ||a + bx||_q$$

C'est-à-dire,

$$||\rho a + \rho' bx||_q \leq ||\rho a + \rho bx||_q. \tag{46}$$

Or, x étant (p, q, ρ)-hypercontractive, alors,

$$||\rho a + \rho bx||_q \leq ||\rho a + bx||_p. \tag{47}$$

Comme $a \mapsto \rho a$ est bijective, (46) et (47) aboutissent à la (p, q, ρ')-hypercontractivité de x.
La suite de la preuve est la même que celle de l'hérédité pour le théorème d'hypercontractivité donc elle n'est pas présentée ici mais il suffit de se reporter au paragraphe 4.1.2 en remplaçant ρ par ρ'. $\square$

4.2 Conséquences de l'hypercontractivité

On peut maintenant obtenir certains résultats sur les fonctions booléennes. On peut énoncer l'inégalité de BONAMI-BECKNER. Si l'inégalité de HÖLDER explique que les normes L^p sont croissantes, cette inégalité permet d'obtenir l'autre sens.

Théorème 9 (Inégalités de BONAMI-BECKNER). *Soit $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré au plus $d \in \{0,\dots,n\}$: c'est à dire que pour $S \subseteq [n]$, si $|S| > d$, alors $\widehat{f}(S) = 0$. Alors*

1. *Pour tout $q \geq 2$,*
$$||f||_q \leq \sqrt{q-1}^d ||f||_2. \tag{48}$$
2. *Pour tout $1 \leq p \leq 2$,*
$$||f||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}^d} ||f||_p. \tag{49}$$

Remarque 23. On peut étendre la définition de T_ρ pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, il suffit de poser pour $\rho \notin [0,1]$ et $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$, $T_\rho f = \sum_{S\subseteq[n]} \rho^{|S|}\widehat{f}(S) w_S$.

Preuve. On peut supposer $f \neq 0$.

1) Soit $q \geq 2$. Alors, en utilisant la propriété de semi-groupe et la (2,q)-hypercontractivité,
$$||f||_q^2 = ||T_1 f||_q^2 = ||T_{\frac{1}{\sqrt{q-1}}} T_{\sqrt{q-1}} f||_q^2 \leq ||T_{\sqrt{q-1}} f||_2^2. \tag{50}$$
Or, comme introduit dans la remarque 23 et comme f est de degré au plus d,
$$T_{\sqrt{q-1}} f = \sum_{S\subseteq[n]} \sqrt{q-1}^{|S|} \widehat{f}(S) w_S = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{q-1}^k f^{=k} = \sum_{k=0}^{d} \sqrt{q-1}^k f^{=k}.$$
Alors,
$$||T_{\sqrt{q-1}} f||_2^2 = \sum_{k=0}^{d} \left(\sqrt{q-1}^k\right)^2 W^k(f) \leq \sum_{k=0}^{d} (q-1)^d W^k(f) = (q-1)^d \sum_{k=0}^{d} W^k(f) = (q-1)^d ||f||_2^2. \tag{51}$$
On conclut en combinant (50) et (51).

2) Soit $1 \leq p \leq 2$. Alors si l'on note p' son exposant de HÖLDER conjugué, $p' \geq 2$ et on vérifie donc (d'après 1) que
$$||f||_{p'} \leq \sqrt{p'-1}^d ||f||_2.$$
Or $p' = 1 + \frac{1}{p-1}$ donc
$$||f||_{p'} \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}^d} ||f||_2. \tag{52}$$
Ensuite, par l'inégalité de HÖLDER et l'inégalité (52),
$$||f||_2^2 = \langle f, f\rangle \leq ||f||_{p'} ||f||_p \leq \frac{1}{\sqrt{p-1}^d} ||f||_2 ||f||_p.$$
On conclut en divisant par $||f||_2$. □

En particulier, on peut facilement prouver l'inégalité de KHINTCHINE, qui a de nombreuses applications, par exemple en théorie des séries aléatoires.

Théorème 10 (Inégalité de KHINTCHINE). *Soient $x_1, \dots, x_N$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, alors pour tout $p \geq 1$, il existe $G_p, D_p > 0$ tels que, pour tous $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$,*

$$G_p \left\| \sum_{k=0}^{N} a_k x_k \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k=0}^{N} a_k x_k \right\|_p \leq D_p \left\| \sum_{k=0}^{N} a_k x_k \right\|_2,$$

ou encore,

$$G_p \sum_{k=0}^{N} a_k^2 \leq \left\| \sum_{k=0}^{N} a_k x_k \right\|_p \leq D_p \sum_{k=0}^{N} a_k^2.$$

Remarque 24. Comme l'étude de nos fonctions se fait en dimension finie, l'équivalence des normes est déjà acquise. Ce résultat n'est pas un résultat d'équivalence des normes, c'est un résultat plus fort car les constantes à gauche et à droite ne dépendent pas de n.

Preuve. **Cas** $p \geq 2$: Soit $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$ de degré au plus 1 et d'espérance nulle. Par croissance des normes L^p et par l'inégalité (48),

$$||f||_2 \leq ||f||_p \leq \sqrt{p-1}||f||_2.$$

Cas $1 \leq p \leq 2$ **:** Soit $f \in \mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$ de degré au plus 1 et d'espérance nulle. Par croissance des normes L^p et par l'inégalité (49),

$$\sqrt{p-1}||f||_2 \leq ||f||_p \leq ||f||_2.$$

On obtient directement l'inégalité voulue. □

4.3 Théorème FKN : fonctions dont la transformée se concentre sur les deux premiers niveaux et stabilité du théorème de ARROW

L'idée de cette section est la suivante : si une fonction booléenne a ses coefficients de FOURIER concentrés sur les deux premiers niveaux (c'est-à-dire qu'elle est proche d'une fonction affine) alors elle est proche d'une fonction affine d'une seule variable : c'est ce qui sera montré dans le lemme 4. Mais alors réciproquement, cette fonction affine d'une variable est proche de f qui est booléenne (à valeurs dans $\{-1, 1\}$), elle est donc "presque" booléenne. Or les seules fonctions affines d'une variables booléennes sont les dictateurs ou les contre-dictateurs et les fonctions constantes d'après la remarque 4. f est donc proche d'une fonction affine d'une variable qui est elle-même proche d'un dictateur ou d'une fonction constante. Ainsi f est proche d'un dictateur, ou d'un contre-dictateur, ou d'une fonction constante égale à 1 ou -1. Le théorème FKN rend concrète cette idée.

Théorème 11 (Théorème FKN [3]). *Il existe des constantes numériques K et K' telles que : pour tout $1 > \delta > 0$, pour toute fonction $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, si $\sum_{|S|>1} \widehat{f}(S)^2 \leq \delta$, alors*

$$\begin{aligned} & ||f - w_i||_2^2 \leq K\delta \text{ pour un certain } i \in [n], \\ \textbf{ou } & ||f + w_i||_2^2 \leq K\delta \text{ pour un certain } i \in [n], \\ \textbf{ou } & ||f - 1||_2^2 \leq K'\delta, \\ \textbf{ou } & ||f + 1||_2^2 \leq K'\delta. \end{aligned}$$

On va d'abord montrer un Lemme :

Lemme 4. *Soit* $g : \{-1,1\}^n \longrightarrow \{-1,1\}$ *avec* $\mathbb{E}[g] = \widehat{g}(\emptyset) = 0$. *On suppose que*

$$\sum_{S\subseteq[n],\,|S|>1} \widehat{g}(S)^2 = \varepsilon$$

où $\varepsilon \leq \frac{16}{729} \approx 0.022$. *Alors il existe* $i \in \{1,\dots,n\}$ *tel que*

$$\widehat{g}(i)^2 \geq 1 - \left(1 + \frac{4374}{1-\varepsilon}\right)\varepsilon$$

et

$$||g - \widehat{g}(i)w_i||_2^2 \leq \left(1 + \frac{4374}{1-\varepsilon}\right)\varepsilon.$$

Preuve. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ fixé. Alors,

$$\begin{aligned} ||g - \widehat{g}(i)w_i||_2^2 &= \left|\left|\sum_{S\subseteq[n],\,S\neq\{i\}} \widehat{g}(S)w_S\right|\right|_2^2 = \sum_{S\subseteq[n],\,S\neq\{i\}} \widehat{g}(S)^2 \\ &= \sum_{|S|=1\; S\neq\{i\}} \widehat{g}(S)^2 + \sum_{|S|>1} \widehat{g}(S)^2 = \sum_{j=1}^{n} \widehat{g}(j)^2 - \widehat{g}(i)^2 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{53}$$

Or, par orthogonalité de $g^{\leq 1} = g^{=1}$ ($\widehat{g}(\emptyset) = 0$) et de $g^{>1}$, comme $g^{=1} + g^{>1} = 1$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(g^{=1} + g^{>1}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(g^{=1}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(g^{>1}\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[g^{=1}g^{>1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(g^{=1}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(g^{>1}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Or $g^2 = 1$ donc $\mathbb{E}\left[g^2\right] = 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{g}(j)^2 = \mathbb{E}\left[\left(g^{=1}\right)^2\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\left(g^{>1}\right)^2\right] = 1 - \varepsilon. \tag{54}$$

Donc en combinant (53) et (54),

$$||g - \widehat{g}(i)w_i||_2^2 = 1 - \widehat{g}(i)^2 \tag{55}$$

On pose $h = (g^{=1})^2 - 1$. L'idée est que si $g^{=1}$ est "presque" à valeurs dans $\{-1,1\}$, ce qu'on voudrait, alors h est proche de zéro. On va essayer de le mesurer : pour $\alpha > 0$, on cherche à majorer $\underset{x\sim\sigma_n}{\mathbb{P}}(|h(x)| > \alpha)$. Soit donc $\alpha > 0$ à déterminer. Or,

$$h = (g^{=1})^2 - 1 = (g - g^{>1})^2 - 1 = g^2 - 2gg^{>1} + \left(g^{>1}\right)^2 - 1 = g^{>1}(g^{>1} - 2g).$$

Ainsi, pour $x \in \{-1,1\}^n$, si $|g^{>1}|(x) \leq \dfrac{\alpha}{4}$, alors

$$|h(x)| \leq \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\alpha}{4} + 2\right) = \frac{\alpha(\alpha+8)}{16},$$

Exigons $\alpha \leq 8$, alors $\dfrac{\alpha+8}{16} \leq 1$ et donc $|h(x)| \leq \alpha$. Par passage au complémentaire, on obtient

$$\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(|h(x)| > \alpha\right) \leq \mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(|g^{>1}(x)| > \frac{\alpha}{4}\right).$$

On utilise maintenant l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(|g^{>1}(x)| > \frac{\alpha}{4}\right) = \mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(|g^{>1}(x)|^2 > \frac{\alpha^2}{16}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(g^{>1}\right)^2\right]}{\frac{\alpha^2}{16}}.$$

C'est-à-dire,

$$\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}\left(|h(x)| > \alpha\right) \leq \frac{16\varepsilon}{\alpha^2}. \tag{56}$$

Calculons la décomposition de Fourier de h :

$$h = \left(\sum_{j=0}^{n} \widehat{g}(j) w_j\right)^2 - 1 = -1 + \sum_{j=0}^{n} \widehat{g}(j)^2 + 2 \sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)\widehat{g}(l) w_k w_l.$$

D'après (54), on obtient

$$h = -\varepsilon + 2 \sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)\widehat{g}(l) w_k w_l. \tag{57}$$

Et donc

$$\mathbb{E}\left[h^2\right] = \varepsilon^2 + 4 \sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)^2\widehat{g}(l)^2 \tag{58}$$

On veut maintenant obtenir une majoration de cette espérance. L'idée suivante est de penser à utiliser l'inégalité (48) de Bonami-Beckner, car la fonction h est de degré 2 comme $g^{=1}$ est de degré 1. En invoquant le cas $p = 4$ érigé au carré, on obtient

$$\sqrt{\mathbb{E}\left[h^4\right]} \leq 9 \times \mathbb{E}\left[h^2\right]. \tag{59}$$

On va utiliser la majoration (56). On note $p := \underset{x\sim\sigma_n}{\mathbb{P}}\left(|h(x)| > \alpha\right)$. Par la formule de l'espérance totale,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h^2\right] &= (1-p)\mathbb{E}\left[h^2 \middle| h^2 \leq \alpha^2\right] + p\,\mathbb{E}\left[h^2 \middle| h^2 > \alpha^2\right] \\
&\leq (1-p)\alpha^2 + p \times \left(\frac{1}{p}\mathbb{E}\left[h^2 \mathbf{1}_{h^2>\alpha^2}\right]\right) \\
&\leq (1-p)\alpha^2 + \mathbb{E}\left[h^2 \mathbf{1}_{h^2>\alpha^2}\mathbf{1}_{h^2>\alpha^2}\right] \\
&\leq (1-p)\alpha^2 + \sqrt{\mathbb{E}\left[h^4\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{h^2>\alpha^2}\right]} \\
&\leq (1-p)\alpha^2 + \sqrt{p}\sqrt{\mathbb{E}\left[h^4\right]}.
\end{aligned}$$

On emploie alors (59) et

$$\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right] \leq (1-p)\alpha^2 + 9\sqrt{p}\,\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right].$$

On se sert également de (56) :

$$\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right] \leq \alpha^2 + 9\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right].$$

Et ainsi, en supposant $\alpha \neq 36\sqrt{\varepsilon}$,

$$\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right] \leq \frac{\alpha^2}{1 - 36\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}}. \tag{60}$$

On cherche maintenant à minimiser en α cette quantité : $\alpha \mapsto \dfrac{\alpha^3}{\alpha - 36\sqrt{\varepsilon}}$ se dérive en $\alpha \mapsto \alpha^2 \dfrac{2\alpha - 108\sqrt{\varepsilon}}{(\alpha - 36\sqrt{\varepsilon})^2}$. On prend donc $\alpha = 54\sqrt{\varepsilon}$. On rajoute en particulier l'hypothèse que $54\sqrt{\varepsilon} \leq 8$, i.e $\varepsilon \leq \frac{16}{729} \approx 0.022$. L'inégalité (60) optimisée est donc

$$\mathbb{E}_x\left[h(x)^2\right] \leq 8748\varepsilon. \tag{61}$$

En combinant (58) et (61),

$$\sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)^2\widehat{g}(l)^2 \leq \frac{8748\varepsilon - \varepsilon^2}{4} \leq 2187\varepsilon. \tag{62}$$

Décidons que i est tel que $\widehat{g}(i)^2 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \widehat{g}(j)^2$. D'après (54),

$$(1-\varepsilon)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} \widehat{g}(j)^2\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} \widehat{g}(j)^4 + 2\sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)^2\widehat{g}(l)^2$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq k<l\leq n} \widehat{g}(k)^2\widehat{g}(l)^2 &= \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)^2 - \sum_{j=0}^{n}\widehat{g}(j)^4\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)^2 - \widehat{g}(i)^2\sum_{j=0}^{n}\widehat{g}(j)^2\right) = \frac{1}{2}\left((1-\varepsilon)^2 - \widehat{g}(i)^2(1-\varepsilon)\right).\end{aligned}$$

En prenant en compte (62), on obtient

$$\widehat{g}(i)^2(1-\varepsilon) + 4374\varepsilon \geq (1-\varepsilon)^2$$

C'est-à-dire :

$$\widehat{g}(i)^2 \geq 1 - \left(1 + \frac{4374}{1-\varepsilon}\right)\varepsilon \tag{63}$$

En combinant ce résultat avec (55), on obtient

$$||g - \widehat{g}(i)w_i||_2^2 \leq \left(1 + \frac{4374}{1-\varepsilon}\right)\varepsilon. \tag{64}$$

□

Remarque 25. On a alors prouvé dans (63) qu'il existe un $i \in [n]$ tel que $|\widehat{g}(i)|$ est proche de 1 à $O(\varepsilon)$ près. Dans (64) on prouve que g est alors proche de $\widehat{g}(i)w_i$ à $O(\varepsilon)$ près, donc en combinant ces deux idées, selon le signe de $\widehat{g}(i)$, on comprend que g est proche à $O(\varepsilon)$ près d'un dictateur w_i ou d'un contre dictateur $-w_i$.

L'idée maintenant est d'associer à f une fonction d'espérance nulle mais conservant les coefficients de FOURIER de f. Concrètement, on va définir une fonction sur $\{-1,1\}^{n+1}$ qui va décaler l'espérance de f sur une fonction de WALSH-FOURIER de coefficient 1. Ceci est expliqué dans le lemme suivant :

Lemme 5. *Soit $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \{-1,1\}$. Soit $g : \{-1,1\}^{n+1} \longrightarrow \{-1,1\}$ telle que pour tous $x \in \{-1,1\}^n$ et $x_{n+1} \in \{-1,1\}$, $g(x, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_{n+1} \cdot x)$. Alors la décomposition de* FOURIER *de g est la suivante :*

$$g = \sum_{S \subseteq [n],\, |S| \text{ pair}} \widehat{f}(S) w_{S \cup \{n+1\}} + \sum_{S \subseteq [n],\, |S| \text{ impair}} \widehat{f}(S) w_S.$$

On vérifie bien en particulier que $\mathbb{E}[g] = 0$.

Preuve. Soient $x \in \{-1,1\}^n$ et $x_{n+1} \in \{-1,1\}$. Alors,

$$\begin{aligned} g(x, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_{n+1} \cdot x) = x_{n+1} \left(\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) \left(\prod_{i \in S} x_{n+1} x_i \right) \right) &= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) {x_{n+1}}^{|S|+1} w_S(x) \\ &= \sum_{S \subseteq [n],\, |S| \text{ pair}} \widehat{f}(S) x_{n+1} w_S(x) + \sum_{S \subseteq [n],\, |S| \text{ impair}} \widehat{f}(S) w_S(x). \end{aligned}$$

$\square$

On va maintenant achever la preuve du théorème FKN.

Preuve. [Du théorème FKN] Soit $f : \{-1,1\}^n \longrightarrow \{-1,1\}$. Soit $g : \{-1,1\}^{n+1} \longrightarrow \{-1,1\}$ comme introduite dans le lemme 5. Posons $C_1 = 1 + \frac{4374}{1-16/729} = \frac{3189359}{713} \approx 4473$.
Soit $\varepsilon = \sum_{|S|>1} \widehat{f}(S)^2$, alors d'après le lemme 5, $\varepsilon = \sum_{|S|>1} \widehat{g}(S)^2$ et d'après le lemme 4, si $\varepsilon \leq \frac{16}{729}$, alors il existe $i \in [n+1]$ tel que

$$\widehat{g}(i)^2 \geq 1 - C_1 \varepsilon$$

et

$$||g - \widehat{g}(i) w_i||_2^2 \leq C_1 \varepsilon. \tag{65}$$

Quitte à augmenter la constante, on pose $C = \max\left\{C_1, \frac{1}{16/729}\right\}$ de sorte que si $\frac{1}{16/729} \leq \varepsilon < 1$, alors $\frac{16}{729}\varepsilon \geq 1$ et donc $C\varepsilon \geq 1 = \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2 \geq \sum_{S \neq i} \widehat{f}(S)^2 = ||g - \widehat{g}(i) w_i||_2^2$.
Ainsi il existe une constante numérique C telle que si $\varepsilon < 1$,

$$||g - \widehat{g}(i) w_i||_2^2 \leq C\varepsilon. \tag{66}$$

De même,

$$\widehat{g}(n+1)^2 \geq 1 - C\varepsilon \tag{67}$$

On va ensuite réfléchir à propos de la valeur de i. En l'occurence, si $i = n+1$, c'est que $|\widehat{f}(\emptyset)| \geq |\widehat{f}(j)|$ pour tout $j \in [n]$. Si $i \leq n$, c'est que pour ce certain i, $|\widehat{f}(i)| \geq |\widehat{f}(\emptyset)|$.

Premier Cas : $i = n+1$**.**
Dans ce cas,

$$\begin{aligned}||g - w_{n+1}||_2^2 &= \left|\left|(\widehat{f}(\emptyset) - 1)w_{n+1} + \sum_{S\subseteq[n],\,|S|\neq 0\,\text{pair}} \widehat{f}(S)w_{S\cup\{n+1\}} + \sum_{S\subseteq[n],\,|S|\,\text{impair}} \widehat{f}(S)w_S\right|\right|_2^2 \\ &= \left(\widehat{f}(\emptyset) - 1\right)^2 + \sum_{S\subseteq[n],\,S\neq\emptyset} \widehat{f}(S)^2 = ||f-1||_2^2 \qquad (68)\end{aligned}$$

et de même,

$$||g + w_{n+1}||_2^2 = ||f+1||_2^2. \qquad (69)$$

On utilise (67) :

$$\widehat{g}(n+1)^2 \geq 1 - C\varepsilon.$$

cette quantité est positive pour $\varepsilon \leq \frac{1}{C} \approx \frac{1}{4473}$, on suppose donc pour le moment que c'est le cas. Alors,

$$1 \geq |\widehat{g}(n+1)| \geq \sqrt{1 - C\varepsilon} \geq 1 - C\varepsilon. \qquad (70)$$

On suppose que $\widehat{g}(n+1) \geq 0$. Dans ce cas, $\widehat{g}(n+1)$ est proche de 1, donc on peut comprendre que g va être proche de w_{n+1}. Par convexité de la norme,

$$\begin{aligned}||g - w_{n+1}||_2^2 &= ||g - \widehat{g}(n+1)w_{n+1} + \widehat{g}(n+1)w_{n+1} - w_{n+1}||_2^2 \\ &\leq 2\,||g - \widehat{g}(n+1)w_{n+1}||_2^2 + 2\,||\widehat{g}(n+1)w_{n+1} - w_{n+1}||_2^2 \\ &\leq C\varepsilon + (1 - \widehat{g}(n+1))^2 \leq C\varepsilon + (1 - (1 - C\varepsilon))^2 = C\varepsilon + C^2\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante numérique $K_1 > 0$ telle que tant que $\varepsilon \leq \frac{1}{C}$,

$$||g - w_{n+1}||_2^2 \leq K_1\varepsilon.$$

On suppose maintenant que $\widehat{g}(n+1) \leq 0$. Alors en adaptant (70) et (67) comme ci-dessus, on arrive à

$$||g + w_{n+1}||_2^2 \leq C\varepsilon + C^2\varepsilon^2$$

donc la conclusion est la même :

$$||g + w_{n+1}||_2^2 \leq K_1\varepsilon.$$

Comme on l'a fait pour (66), on peut étendre ce résultat tout en utilisant (68) et (69), et en rappelant que $\widehat{g}(n+1) = \widehat{f}(\emptyset)$. Il existe $K' > 0$ une constante numérique telle que si $\widehat{f}(\emptyset) \geq 0$, alors

$$||f - 1||_2^2 \leq K'\varepsilon.$$

et si $\widehat{f}(\emptyset) \leq 0$, alors

$$||f + 1||_2^2 \leq K'\varepsilon.$$

Deuxième cas : $i \leq n$**.**
Le schéma de preuve est le même que dans le premier cas. On arrive donc à la même conclusion : il existe une constante numérique $K > 0$ telle que si $\widehat{f}(i) \geq 0$, alors

$$||f - w_i||_2^2 \leq K\varepsilon$$

et si $\widehat{f}(i) \leq 0$, alors

$$||f + w_i||_2^2 \leq K\varepsilon.$$

$\square$

Ce théorème permet en particulier d'apporter une version stabilisée ou quantitative du théorème de ARROW car on explique que quand il est presque sûr d'avoir un vainqueur de CONDORCET, alors il y a presque un dictateur.

Théorème 12. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute règle de vote f équilibrée (d'espérance nulle) utilisée dans un vote de* CONDORCET *entre trois candidats, si la probabilité d'avoir une issue incohérente est plus petite que ε, alors il existe $i \in [n]$ tel que*

la probabilité que la personne élue soit différente du choix de w_i est plus petite que $K\varepsilon$

ou *la probabilité que la personne élue soit différente du choix de $-w_i$ est plus petite que $K\varepsilon$.*

Preuve. Soit p la probabilité que l'issue soit cohérente. D'après le corollaire 1,

$$p \leq \frac{7}{9} + \frac{2}{9} W^1[f],$$

or par hypothèse,

$$p \geq 1 - \varepsilon,$$

on obtient donc

$$W^1[f] \geq 1 - \frac{2}{9}\varepsilon.$$

Or, $W^1[f] + \widehat{f}(\emptyset)^2 + W^{\geq 2}[f] = 1$, donc on en déduit que

$$W^{\geq 2}[f] \leq \frac{9}{2}\varepsilon.$$

Sachant que $\widehat{f}(\emptyset) = 0$ (qui apporte seulement que f ne sera pas proche d'une fonction constante), par le théorème 11, il existe $i \in [n]$ tel que :

$$||f - w_i||_2^2 \leq \frac{9}{2}K\varepsilon \quad \text{ou} \quad ||f + w_i||_2^2 \leq \frac{9}{2}K\varepsilon \tag{71}$$

On suppose se placer dans le premier cas, on va maintenant exprimer $\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) \neq w_i(x)]$. Or comme f et w_i sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned}\langle f, w_i \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)w_i(x) &= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{x\in\{-1,1\}^n,\, f(x)=w_i(x)} 1 + \sum_{x\in\{-1,1\}^n,\, f(x)\neq w_i(x)} (-1) \right) \\ &= \mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) = w_i(x)] - \mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) \neq w_i(x)] = 1 - 2\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) \neq w_i(x)].\end{aligned}$$

Et,

$$||f - w_i||_2^2 = ||f||_2^2 - 2\langle f, w_i \rangle + ||w_i||_2^2 = 2(1 - \langle f, w_i \rangle)$$

Donc,

$$\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) \neq w_i(x)] = \frac{1}{4}||f - w_i||_2^2.$$

Ainsi, quitte à modifier K, on obtient bien

$$\mathbb{P}_{x\sim\sigma_n}[f(x) \neq w_i(x)] \leq K\varepsilon.$$

De même pour $-w_i$. $\square$

Références

[1] Ryan O'Donnell, *Analysis of Boolean Functions*, Cambridge, 2014, 1-11, 26-53, 104-107, 250-257, 267-268, 278-283.

[2] Nicolas de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, 1784.

[3] Ehud Friedgut, Gil Kalai, Assar Naor, *Boolean Functions Whose Fourier Transform is Concentrated on the First Two Levels*, Advances in Applied Mathematics, 2002, 433-436.

[4] Ehud Friedgut, Gil Kalai, Assar Naor, *FKN, first proof, rewritten.*

[5] Gil Kalai, *A Fourier-theoretic perpective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem*, Advances in Applied Mathematics, 2001, 421-422.