Stage de L3 sous la direction de Viet Chi Tran
effectué au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées

Étude de processus stochastiques modélisant une dynamique de population en grand nombre

ENS Rennes

Adrienne Le Meur

9 Mai - 1 juillet 2022

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Quelques notions de probabilités **1**
2.1 Espérance conditionnelle 1
2.2 Processus aléatoire 3
2.3 Le mouvement Brownien 6

3 Les équations différentielles stochastiques **7**
3.1 Intégrale stochastique 7
3.2 Un processus remarquable : le processus de Poisson 9
3.3 Convergence de processus cadlag 12

4 Modélisation **14**
4.1 Approximation déterministe en grande population 14
4.2 Convergence vers un mouvement brownien 21

5 Conclusion et prespectives **26**

1 Introduction

Un système biologique évolue selon des naissances, des morts, de mutations, et des apparitions de traits distinctifs. On peut donc s'intéresser à l'évolution du nombre d'organismes d'une population, qui est une fonction à valeur dans $\mathbb{N}$. De nombreux modèles biologiques et écologiques, comme le modèle SIR ou le modèle proie-prédateur de Lotka Volterra utilisent des équations différentielles ordinaires (EDO) pour modéliser l'évolution de systèmes biologiques. Ce choix de modélisation a des inconvénients : il modélise une quantité discrète par une approximation continue, comme s'il pouvait y avoir des fractions infinitésimales d'organismes. Il faut donc sortir du paradigme des EDO pour considérer dans notre modèle des fonctions discontinues qui peuvent comporter des sauts. Cela sera permis par l'introduction d'un nouveau type d'équation différentielle de nature probabiliste. On appellera cet outil équation différentielle stochastique (EDS). Elles ont des solutions qui peuvent converger, en un sens qui reste à préciser, pour certains jeux de paramètres, vers des solutions d'EDO. Cela montre la puissance de cet outil : les EDO en sont un cas limite, une approximation. D'autres jeux de paramètres donnent des limites qui n'obéissent pas à des EDO, mais à des EDS.

Plus spécifiquement, l'objectif de ce stage va être d'étudier l'article [Mé04] qui propose un modèle de population individuel stochastique et en fait l'étude asymptotique en grande population. On étudiera de même une version simplifiée du modèle de référence. Notre modèle aura pour limite un modèle macroscopique régi, selon les hypothèses, par une EDO dans un premier cas, et par une EDS dans un second cas.

Dans la section 2, nous introduirons des notions visant à définir ce qu'on appelle un processus, et dont un exemple, le mouvement brownien est développé. Dans la section 3, nous introduirons la notion d'EDS et développerons des outils pour la convergence de processus. Dans la section 4, nous étudierons un modèle de dynamique de population en suivant la démarche de l'article [Mé04]. On s'intéressera aux limites des solutions obéissant à ce modèle en grande population, avec deux choix de paramètres différents (sections 4.1 et 4.2). C'est dans cette section que se trouveront la plupart des preuves, les sections 2 et 3 ne comportant presque pas de preuves car elles ne servent qu'à exposer des outils utiles pour la suite. Enfin nous conclurons en section 5.

On se placera dans toute la suite dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

2 Quelques notions de probabilités

2.1 Espérance conditionnelle

Tout d'abord, on a besoin de définir la notion d'**espérance d'une variable aléatoire conditionnée à un événement**. On va le faire en suivant l'explication du polycopié [Pri05]. On va pour ce faire s'inspirer de la définition de la probabilité d'un événement conditionnée à un autre événement.

Soient $A, B \in \mathcal{F}$. On a la définition naturelle $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid B) := \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mathbb{P}$. De même que l'espérance est linéaire, on veut construire une espérance conditionnée à l'événement B qui soit linéaire. On étend donc la définition par linéarité, à tout X v.a. étagée, puis par densité de $\{\mathbb{1}_A, A \in \mathcal{F}\}$ dans $\mathbb{L}^1$ et par théorème de convergence monotone, pour toute v.a. X comme suit :

Définition 2.1. *Soient $B \in \mathcal{F}$, X une v.a. intégrable. On définit*

$$\mathbb{E}(X \mid B) := \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Il s'agit maintenant de définir la notion d'**espérance conditionnée à une tribu**.
Commençons par nous demander ce qu'on aimerait que cela signifie dans un cas élémentaire. Soit $B \in \mathcal{F}$ et X une v.a. ($\mathcal{F}$-mesurable). Prenons le cas où la tribu est la plus simple possible, i.e. $\mathcal{B} := \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$. L'espérance conditionnelle de X sachant B est l'espérance de X sachant que $\omega \in B$. Or on s'attend via le concept d'espérance conditionnée à une tribu, à retrouver l'espérance conditionnée à un événement donné. On peut donc souhaiter que l'espérance conditionnée à une tribu soit une variable aléatoire qui, à un ω donné dans B, renvoie l'espérance de X sachant B. Il est alors assez logique de définir la v.a.

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X \mid B)\mathbb{1}_B + \mathbb{E}(X \mid B^c)\mathbb{1}_{B^c},$$

qui est une v.a. $\mathcal{B}$-mesurable. On peut remarquer qu'il s'agit de l'unique v.a. Y $\mathcal{B}$-mesurable telle que pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\int_B Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

La démonstration ne sera pas détaillée ici mais se fait aisément par analyse synthèse. Cette caractérisation est bien plus générale que la formule donnée plus haut, qui utilise le fait que la tribu soit engendrée par des événements qui forment une partition de Ω.

De cette remarque naît une question : pour une tribu $\mathcal{B}$ quelconque incluse dans $\mathcal{F}$, et X une v.a. intégrable, peut-on dire qu'il existe une unique v.a. Y $\mathcal{B}$-mesurable telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$? Si c'est le cas, nous avons un candidat naturel pour définir l'espérance conditionnée par une tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ quelconque.

Nous aurons d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soient X, Y des v.a.r $\mathcal{B}$-mesurables positives ou intégrables telles que pour tous $B \in \mathcal{F}$, $\int_B Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ (resp. $=$, resp. $\geq$). Alors $Y \leq X$ (resp. $Y = X$, resp. $Y \geq X$)*

Preuve. On veut prouver par l'absurde que $Y \leq X$. On s'intéresse pour ce faire à l'événement $X < Y$. Pour tous $a < b$ rationnels, on pose $F_{a,b} := \{X \leq a < b \leq Y\}$ qui est un mesurable. On a donc $\{X < Y\} = \cup_{a<b\in\mathbb{Q}} F_{a,b}$ mesurable (union dénombrable). On va supposer par l'absurde que $\mathbb{P}(F_{a,b}) \neq 0$. Pour $a < b \in \mathbb{Q}$ fixés,

$$X \mathbb{1}_{F_{a,b}} \leq a \mathbb{1}_{F_{a,b}} \text{ et } b \mathbb{1}_{F_{a,b}} \leq Y \mathbb{1}_{F_{a,b}}.$$

Donc par hypothèse,

$$\int_{F_{a,b}} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq a\mathbb{P}(F_{a,b}) < b\mathbb{P}(F_{a,b}) \leq \int_{F_{a,b}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse. Donc $\mathbb{P}(F_{a,b}) = 0$ et en particulier $\mathbb{P}(X < Y) = 0$. D'où $X \geq Y$ p.s. On traite de même le deuxième cas, et on utilise les deux premiers résultats avec des inégalités pour traiter le cas de l'égalité. □

Théorème 2.3. *Soit X une v.a.r intégrable. Il existe Y une v.a.r intégrable et $\mathcal{B}$-mesurable, unique à égalité presque sûre près, telle que pour tous $B \in \mathcal{B}$,*

$$\int_B Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

La classe d'équivalence de Y est appelée espérance conditionnée à $\mathcal{B}$. On la note $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$.

L'unicité découle simplement du lemme précédent. La démonstration de l'existence de l'espérance conditionnelle repose sur l'espérance conditionnelle dans le cas particulier où la v.a. est non seulement $\mathbb{L}^1$ mais $\mathbb{L}^2$.

Dans le cas d'une variable aléatoire $\mathbb{L}^2$, on utilisera plutôt la caractérisation suivante, dont l'intérêt est de fournir une interprétation géométrique :

Corollaire 2.4. *Soit X une v.a.r $\mathbb{L}^2$. Il existe Y une v.a.r de carré intégrable, $\mathcal{B}$-mesurable et telle que pour toute v.a.r $\mathcal{B}$-mesurable de carré intégrable Z, $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(XZ)$. Une telle v.a. est unique à équivalence près (pour la relation d'équivalence d'égalité p.s), et il s'agit de $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$.*

Preuve. D'après le théorème de Riesz-Fisher, l'espace des v.a. de carré intégrable est un Hilbert muni du produit scalaire $X, Y \mapsto \mathbb{E}(XY)$. Le théorème de projection sur un convexe fermé conclut. □

Remarque. On peut donc, grâce à cette caractérisation, interpréter $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$ comme un représentant de la projection orthogonale de X sur l'ensemble $\{Z \in \mathbb{L}^2, Z$ a un représentant $\mathcal{B}$-mesurable$\}$. Alors

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}))^2\right) = \inf_{Z\in\mathbb{L}^2, \mathcal{B}\text{-}\boldsymbol{mesurable}} \mathbb{E}\left((X - Z)^2\right).$$

On peut maintenant utiliser cette propriété pour démontrer l'existence de l'espérance conditionnelle dans le cas simplement intégrable :

Preuve. Grâce à cette remarque, démontrons l'existence de l'espérance conditionnelle dans le cas général. Soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose $X \geq 0$ p.s. On pose pour tout n, $X_n := X \wedge n$. Pour tout n, X_n est de carré intégral donc admet une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$ qu'on note Y_n. D'après le lemme **??**, $Y_n \geq 0$ p.s., et (Y_n) est p.s. croissante. On pose $Y := \limsup_{n\to+\infty} Y_n$. Alors Y est $\mathcal{B}$-mesurable et, d'après le théorème de Beppo-Levi, pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\int_B Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \limsup_n \int_B Y_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \limsup_n \int_B X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B X \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Si X est seulement intégrable, on écrit $X = X^+ - X^-$ et on conclut par ce qui précède. □

Établissons quelques propriétés utiles pour manipuler les espérances conditionnelles.

Proposition 2.5. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ des sous tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Soient X, Y, Z des v.a. intégrables, avec Z $\mathcal{B}$-mesurable, et a, b des réels.*

- $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{B})$ *p.s,*
- *Si $X \geq 0$ p.s, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) \geq 0$ p.s,*
- $|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{B})$,
- $\mathbb{E}(XZ \mid \mathcal{B}) = Z\mathbb{E}(X)$ *p.s,*
- $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{C}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C})$ *p.s.*

Théorème 2.6. *Soient X, Y des v.a. intégrables, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe.*

- ***inégalité de Cauchy-Schwartz :*** *si de plus X et Y sont de carré intégrable, alors*
$$|\ \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{B})\ |^2 \leq \mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{B})\, \mathbb{E}(Y^2 \mid \mathcal{B}) \quad p.s,$$
- ***inégalité de Jensen :***
$$f\left(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})\right) \leq \mathbb{E}(f(X) \mid \mathcal{B}),$$
- ***théorème de convergence monotone :*** *soit (X_n) une suite p.s croissante de v.a. intégrables et positives et qui convergent p.s vers X. Alors*
$$\lim_n \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}),$$
- ***inégalité de Fatou :*** *Soit (X_n) une suite v.a. intégrables. Alors*
$$\mathbb{E}(\liminf X_n \mid \mathcal{B}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{B}),$$
- ***théorème de convergence dominée :*** *Soit (X_n) une suite de v.a. intégrables qui convergent p.s vers X et telles que $|X_n| \leq Y$. Alors $\lim_n \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$.*

Les démonstrations ressemblent fortement à celles des théorèmes analogues pour l'espérance non conditionnelle. Elles peuvent être trouvées dans le livre [Bou04].

2.2 Processus aléatoire

Pour représenter un phénomène dépendant du temps et du hasard, il est assez naturel de s'intéresser à une fonction $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ à valeurs dans un espace E. À t fixé, l'état du système est représenté par la v.a. $X(t, \cdot)$.
En outre, à ω fixé, donc pour une évolution particulière du système, la fonction $t \mapsto X(t, \omega)$ est une trajectoire.

La suite utilise le polycopié [Pri05]. On définit la notion suivante :

Définition 2.7. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille de v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. On dit que $X := \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$ est un **processus stochastique défini sur** $\mathbb{R}_+$ **à valeurs dans** $(E, \mathcal{E})$. On dit que $(E, \mathcal{E})$ est un **espace d'état**. C'est dans cet espace qu'évoluent les vecteurs d'état.*

Définition 2.8. *Soit $(\mathcal{F}_t)_t$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ au sens où pour tous $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. On dit que $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un **espace de probabilité filtré** et que $(\mathcal{F}_t)_t$ est une **filtration**. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille de variables aléatoires telle que pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On dit que X_t est un **processus adapté (à la filtration)**.*

Remarque. *On remarque que tout processus X_t est adapté pour la filtration $(\sigma(\{X_s, s \leq t\}))_t$. On fera donc souvent le raccourci de parler d'un processus au lieu de préciser qu'on pense à un processus adapté à la filtration décrite ici.*

On introduit ensuite la notion de temps d'arrêt dont l'utilité apparaîtra plus tard.

Définition 2.9. *Si $(\mathcal{F}_t)_t$ est notre filtration on note $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Soit T une application de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$. On dit que T est un **temps d'arrêt** pour la filtration $\mathcal{F}_t$ ssi pour tout $t \geq 0$, $\{T \geq t\} \in \mathcal{F}_t$. De plus on pose*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

*Enfin pour X un processus adapté, on note $M^T := M_{\cdot\wedge T}$ le **processus** dit **arrêté**.*

Remarque. *On peut vérifier que, sur $\{T = t\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$. De plus si T_1 et T_2 sont des temps d'arrêt, $T_1 + T_2$ et $T_1 \wedge T_2$ sont des temps d'arrêt et sur $\{T_1 \leq T_2\}$, $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.*
Il faut cependant ne pas se faire une fausse intuition sur la tribu $\mathcal{F}_T$: ses mesurables ne sont pas seulement l'union des $\mathcal{F}_t$. Ses mesurables peuvent être une union de sous-ensembles de mesurables de plusieurs tribus $\mathcal{F}_t$ différentes.

De fait, il est difficile de manipuler une famille non dénombrable de v.a. En revanche il est plus facile de manipuler des sous-familles finies. On va voir que sous certaines conditions, la connaissances des sous-familles finies permet de remonter à la famille initiale. C'est le théorème de Kolmogorov.

Théorème 2.10 (de Kolmogorov)**.** *On suppose que l'espace d'état est $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ou un espace dénombrable muni de la tribu de toutes ses parties. On le note dans tous les cas $(E, \mathcal{E})$.*
Supposons que pour chaque partie finie S de $\mathbb{R}_+$, une probabilité μ_S sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$ soit connue. Supposons en plus que les probabilités μ_S sont compatibles, au sens où pour toutes parties finies $S := \{t_1, \dots, t_n\}$ et $S' := \{s_1, \dots, s_m\}$ de $\mathbb{R}_+$ telles que $S \subset S'$,

$$\mu_S(\{t_1, \dots, t_n\}) = \mu_{S'}(p^{-1}_{S',S}(\{t_1, \dots, t_n\})),$$

où l'on note $p_{S',S}$ la projection canonique de $E^{S'}$ sur E^S. Alors il existe une unique probabilité μ sur $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{R}_+})$ telle que, pour tout $S := \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, on ait l'égalité $\mu(t_1, \dots, t_n) = \mu_S(t_1, \dots, t_n)$. Il existe également $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et tel que $\mu((X_{t_1}, \dots X_{t_n}) \in A) = \mu_S(A)$, pour tout $A \in \mathcal{E}^{\otimes S}$, où S sous ensemble fini de $\mathbb{R}_+$.

Nous admettrons ce théorème.

Remarque. *Concrètement, ce théorème ne nous servira qu'à savoir qu'il suffit de connaître les lois dites **fini-dimensionnelles** $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ pour toute collection de réels $\{t_1, \dots, t_n\}$ pour remonter à un processus $(X_t)_{\mathbb{R}^+}$, sous réserve bien sûr de compatibilité.*

Grâce à ce qui précède, on va pouvoir étudier des familles non dénombrables de v.a. On se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.
On va s'intéresser à des processus qui ne dépendent que de leur passé. On introduit la notion de **martingales**.

Définition 2.11. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus réel adapté tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in \mathbb{L}^1$. Il s'agit d'une **martingale** ssi pour tous $s < t$,*

$$\mathbb{E}(X_t \,|\, \mathcal{F}_s) = X_s.$$

On dispose d'une inégalité très utile portant sur des martingales.

Proposition 2.12. *Soit $(X_t)_{\mathbb{R}_+}$ une martingale telle que toutes les trajectoires soient continues à droite. Alors pour tout $T > 0$ réel*

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{s\leq T} |X_s|\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}((X_T)^2).$$

L'inégalité (2.12) est dite **inégalité de Doob**.

Introduisons une catégorie particulièrement utile et générale de processus : les semimartingales. Pour introduire cette notion, nous avons besoin d'introduire deux types de processus de façon préliminaire.

Définition 2.13. *Soit M un processus réel adapté à trajectoires continues tel que $M_0 = 0$ p.s. On dit que M est une* ***martingale locale*** *ssi il existe une suite croissante T_n de temps d'arrêt telle que $T_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ p.s et pour tout n le processus M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.*

Remarque. Si M est une martingale locale, alors pour tout temps d'arrêt T, M^T est aussi une martingale locale. L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.

L'autre type de processus qui nous intéressera est le suivant.

Définition 2.14. *Soit $T > 0$. Soit $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application telle que $a(0) = 0$. On dit que a est* ***à variation finie*** *s'il existe une mesure signée μ (i.e. la différence de deux mesures finies) telle que pour tout $0 \leq t \leq T$, $a(t) = \mu([0,t])$.*

Remarquons qu'il existe une unique décomposition d'une mesure signée en différence de deux mesures finies de supports disjoints. En effet soit μ une mesure signée. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures finies telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Alors si on pose $\nu = \mu_1 + \mu_2$, on peut facilement prouver, via le théorème de Radon-Nikodym, qu'il existe h une application telle que pour tout t, $\mu(\mathrm{d}t) = h(t)\nu(\mathrm{d}t)$. Alors en posant $\mu_+(\mathrm{d}t) = h^+(t)\nu(\mathrm{d}t)$ et $\mu_-(\mathrm{d}t) = h^-(t)\nu(\mathrm{d}t)$, de supports respectivement $\{t,\ h(t) > 0\}$ et $\{t,\ h(t) < 0\}$ disjoints, on trouve que $\mu = \mu_+ - \mu_-$. L'unicité découle du fait que, si on a la relation $\mu = \mu_1 - \mu_2$ pour μ_1 et μ_2 des mesures finies, alors pour tout borélien A, si $\mu(A) < 0$, alors $\mu_1(A) = 0$ et $\mu_2(A) = \mu(A)$ puisque les deux mesures sont à supports disjoints. On traite de même des autres cas, ce qui permet de conclure quant à l'unicité d'une telle décomposition.

On note donc $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$. En outre, si $f : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable telle que $\int_0^T |f(s)|\,|\mu|(\mathrm{d}s) < +\infty$, et qu'on reprend les notations de la définition précédente, alors on pose

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) := \int_0^T f(s)\,\mu(\mathrm{d}s),$$
$$\int_0^T f(s)|\mathrm{d}a(s)| := \int_0^T f(s)|\mu|(\mathrm{d}s).$$

On remarque tout de suite que $t \mapsto \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}a(s)$ est automatiquement à variations finies, par séparation des parties positives et négatives de f et de μ. De plus, pour toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ de subdivisions de $[0,T]$ de pas tendant vers 0,

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}a(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)(a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)).$$

Proposition 2.15. *Soient a une application à variation finie et μ une mesure signée associée. Pour tout $t \in [0,T]$,*

$$|\mu|([0,t]) = \sup_{0=t_0<t_1<\cdots<t_p=t \text{ subdivision de } [0,t]} \sum_{i=1}^{p} |a(t_i) - a(t_{i-1})| = \int_0^t |\mathrm{d}a(s)| < +\infty.$$

De cette définition d'analyse découle une notion de probabilités.

Définition 2.16. *Un* ***processus à variation finie*** *est un processus réel adapté dont les trajectoires sont p.s à variation finie.*

On en vient à la définition des semimartingales continues.

Définition 2.17. *Soit X_t un processus tel qu'il existe X_0 une v.a. $\mathbb{L}^1$, M_t une martingale locale et A_t un processus à variation finie tels que*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t.$$

On dit que X est une ***semimartingale continue****.*

En réalité la décomposition en somme d'une v.a., d'une martingale locale et d'un processus à variation finie, qu'on appelle **décomposition de Doob**, est unique. Cela découle de la propriété suivante.

Proposition 2.18. *Soit M une martingale locale. Si de plus M est à variation finie, alors p.s pour tout $t \geq 0$, $M_t = 0$.*

La démonstration de cette propriété repose sur la construction d'une intégrale dite stochastique et d'une notion appelée crochet qui seront abordées en section 3.1. On n'y reviendra cependant pas pour ne pas alourdir l'exposé. Toujours est-il que cela nous permet de d'aboutir à la démonstration suivante

Preuve. Montrons l'unicité de la décomposition de Doob. Si on a X_0 et $\tilde{X}_0$ des v.a. intégrables, M et $\tilde{M}$ des martingales locales, et enfin A et $\tilde{A}$ des processus à variation finie tels que $X_0 + M_t + A_t = \tilde{X}_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$, alors déjà $X_0 = \tilde{X}_0$, par évaluation en $t = 0$, puis $M_t - \tilde{M}_t = \tilde{A}_t - A_t$. Or la différence de deux processus à variation finie est à variation finie et de même pour les martingales locales. La propriété précédente permet d'en déduire que $A = \tilde{A}$ et $M = \tilde{M}$. □

2.3 Le mouvement Brownien

Le mouvement brownien représente un mouvement désordonné et aléatoire. Il est souvent utilisé en physique ou en mathématique pour modéliser un "bruit" aléatoire. On en verra une illustration en Figure 1. Sa construction dans le polycopié [Gal08] ne sera pas détaillée ici mais on en décrira les grandes lignes.

Définition 2.19. *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un* ***pré-mouvement brownien*** *ssi $X_0 = 0$ p.s et pour tous $0 \leq s < t$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_u, u \leq s)$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

On admettra l'existence d'un pré-mouvement brownien.

Proposition 2.20. *Soit X un pré-mouvement brownien. Alors*
- *$-X$ est également un pré-mouvement brownien. C'est une propriété de* ***symétrie****.*
- *pour tout $\lambda > 0$, $(\frac{1}{\lambda}X_{\lambda^2 t})_t$ est un pré-mouvement brownien. On dit qu'il y a* ***invariance par changement d'échelle****.*
- *pour tout $s \geq 0$, $(X_{s+t} - X_s)_t$ est un pré-mouvement brownien indépendant de $\sigma(X_u, u \leq s)$. Cette propriété s'appelle la* ***propriété de Markov simple****.*

Les deux premiers points se démontrent facilement mais la démonstration du troisième nécessiterait une autre caractérisation du pré-mouvement brownien, donc on l'admettra pour ne pas rendre l'exposé trop lourd.

Le problème du concept de pré-mouvement brownien est qu'il n'est pas assez descriptif et il est difficile de s'en faire une intuition. On aimerait en sélectionner un qui soit un tant soit peu régulier, quitte à devoir le modifier un peu. C'est à cela que sert la définition suivante.

Définition 2.21. *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ deux processus. On dit que $\tilde{X}$ est une* ***modification*** *de X ssi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}\left(\tilde{X}_t = X_t\right) = 1$.*

On remarque que deux processus qui sont la modification l'un de l'autre ont les mêmes lois fini dimensionnelles. Donc ils ont la même loi d'après le Théorème de Kolmogorov 2.10.

On admettra que tout mouvement pré-brownien admet une modification dont les trajectoires sont continues. Cela découle du Lemme de Kolmogorov qu'on n'énoncera pas ici.

Définition 2.22. *Le* ***mouvement brownien*** *est un pré-mouvement brownien dont les trajectoires sont continues.*

Un mouvement brownien vérifie donc bien sûr la propriété de symétrie, d'invariance par changement d'échelle et de Markov faible. Grâce à la continuité des trajectoires du brownien, on a la propriété suivante :

Proposition 2.23. *Soit X un mouvement brownien. On a p.s pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\sup_{0\leq s\leq \epsilon} X_s > 0 \ \text{ et } \ \inf_{0\leq s\leq \epsilon} X_s < 0.$$

De plus, p.s pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\inf\{t, X_t = a\} < +\infty$.
Pour tous $t > 0$, $a \geq 0$ et b des réels tels que $b \leq a$. Alors

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} X_s \geq a,\ X_t \leq b) = \mathbb{P}(X_t \geq 2a - b).$$

On appelle cela le ***principe de réflexion****.*

Cela signifie en gros que la trajectoire du brownien n'est pas orientée et "se balade dans tout l'espace".

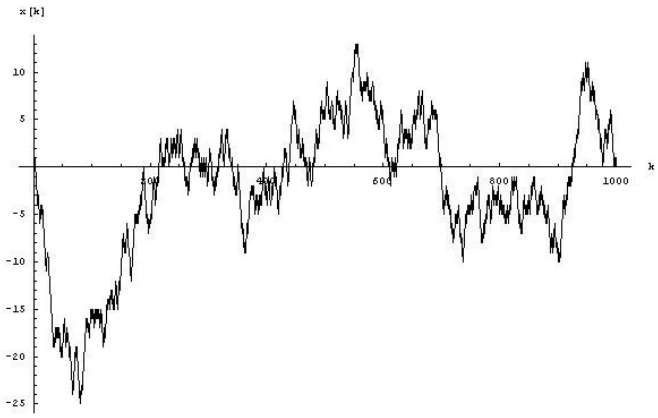

FIGURE 1 – Mouvement brownien réel.

Toutes ces propriétés permettent de comprendre pourquoi un mouvement brownien ressemble à la Figure 1.

On introduit une dernière propriété importante, cette fois-ci du point de vue théorique, du mouvement brownien qui est la propriété dite de Markov forte.

Proposition 2.24. *Soit X un mouvement brownien. Pour tout T temps d'arrêt, le processus $X_{T+t} - X_T$, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.*

On finit sur un théorème qui fournit une caractérisation importante.

Théorème 2.25 (caractérisation de Lévy)**.** *Soit X un processus réel continu $(\mathcal{F}_t)_t$-adapté tel que $X_0 = 0$. Alors X est un $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement brownien réel ssi X est une martingale locale continue telle que $\langle X \rangle_t = t$.*

La démonstration de ce théorème est difficile et sera donc admise.

3 Les équations différentielles stochastiques

Nous allons introduire une généralisation de la notion d'équation différentielle qui est utile pour modéliser des phénomènes soumis à un bruit, autrement dit une perturbation aléatoire.

3.1 Intégrale stochastique

Toute cette section utilise le polycopié [Gal08]. Introduisons une première notion d'intégrale stochastique : celle contre un processus à variations finies.

Proposition 3.1. *Soit H un* ***processus progressif*** *i.e. tel que pour tout $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto H_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Soit A un processus à variation finie tel que p.s, pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t |H_s| \, |\mathrm{d}A_s| < +\infty$. Alors le processus $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}A_s$ est un processus à variation finie.*

Remarque. Cette propriété peut paraître à première vue évidente puisque les trajectoires seront p.s à variation finie, mais la difficulté réside dans la propriété d'adaptation du processus à la filtration.

Nous allons introduire la notion de **crochet** ou **variation quadratique** d'une martingale.

Définition 3.2. *Soit $(M_t)_{t \leq 0}$ une martingale locale. Il existe un processus croissant, noté $\langle M \rangle_t$ et appelé crochet ou variation quadratique, unique à égalité p.s près, tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ soit une martingale locale*

L'unicité découle du même argument que celui pour la décomposition de Doob. Pour ce qui est de l'existence, on pose pour tout t, et toute suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$, de pas tendant vers 0, la quantité $\langle M \rangle_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2$, où la limite est une limite au sens de la convergence en probabilité. On peut vérifier que cette quantité existe et convient bien.

On étend la définition de crochet au crochet de deux martingales locales dans la définition suivante.

Définition 3.3. *Soient M et N deux martingales locales. On pose*

$$\langle M, N\rangle_t := \frac{1}{2}(\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t).$$

Et enfin on définit la notion de crochet de deux semimartingales continues.

Définition 3.4. *Soient $X_t = X_0 + M_t + A_t$ et $\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$ deux semimartingales. On pose*

$$\langle X, \tilde{X}\rangle := \langle M, \tilde{M}\rangle.$$

Remarque. *Vu ce qui précède, il est facile de se convaincre qu'on a la formule*

$$\langle M, N\rangle_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}), \tag{1}$$

où pour tout t, $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0,t]$, de pas tendant vers 0.

On établit une propriété du crochet défini par la définition 3.4 qui sera très utile par la suite.

Proposition 3.5. *Soit X une semimartingale et A un processus à variation finie. Alors $\langle X, A\rangle = 0$.*

Preuve. Soit $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ une subdivision de $[0,t]$. On a donc, d'après la formule (1),

$$\langle X, A\rangle_t \leq \sup_{0\leq i\leq p_n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| \cdot \sum_{i=1}^{p_n} |A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}| \leq \sup_{0\leq i\leq p_n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| \cdot \int_0^t |\mathrm{d}A_s| \xrightarrow[p.s]{n\to+\infty} 0,$$

par continuité des trajectoires de X et Proposition 2.15 des processus à variation finie. □

On veut maintenant définir des équations différentielles stochastiques. Or le parallèle avec les EDO nous apprend que souvent les formes intégrales sont utiles pour parler d'équations différentielles. On veut donc construire un nouveau type d'intégrale qu'on appelle intégrale stochastique, dont un cas particulier a été introduit dans le cas des intégrales contre des processus à variation finie, mais qu'on veut étendre à une intégrale contre les semimartingales. On ne va pas détailler sa construction mais en donner les grandes lignes en suivant le déroulement du polycopié [Gal08].
Par des arguments classiques de prolongement d'isométries dans des espaces de Hilbert, ou par un argument de dualité, on étend la définition de l'intégrale d'un processus progressif H contre un processus à variation finie à une intégrale de n'importe quel processus progressif tel que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < +\infty$ contre une martingale locale M. On obtient donc des propriétés pour l'intégrale stochastique que lon résume dans la Proposition suivante.

Proposition 3.6. *Soient M une martingale locale et H un processus progressif tel que pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < +\infty.$$

Si de plus $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right) < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right] = 0, \tag{2}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s H_s' \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right], \tag{3}$$

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s \,\mathrm{d}M_s, \int_0^\cdot K_s \,\mathrm{d}N_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle M, N\rangle_s. \tag{4}$$

Ensuite on définit l'intégrale contre une semimartingale comme suit

Définition 3.7. *Soient $X = X_0 + M + A$ une semimartingale continue, et H un processus progressif tel que p.s pour tout $t \geq 0$, $\sup_{s<t} |H_s| < +\infty$. Alors on pose*

$$\int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}M_s + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}A_s.$$

L'application $(H, X) \mapsto \int_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s$ est une application bilinéaire.

Introduisons enfin la notion d'**équation différentielle stochastique (EDS)**.

Définition 3.8. *Soient σ, b des fonction mesurable localement bornée définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle sous forme intégrale*

$$X_t = \int_0^t \sigma(s, X_s) \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(s, X_s) \, \mathrm{d}s$$

est la donnée d'un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, d'un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel B, et d'un processus réel $(\mathcal{F}_t)$-adapté continu X.

On a le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'EDS suivant, qui ressemble fortement au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 3.9. *Supposons les fonctions σ, b continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne en la deuxième variable. Alors pour tout espace probabilisé et mouvement brownien fixés, il existe une solution à l'EDS associée. De plus, deux solutions de l'EDS X et $\tilde{X}$ telles que $X_0 = \tilde{X}_0$ sont telles que p.s, pour tout t, $X_t = \tilde{X}_t$ (on dit que les solutions sont **indistinguables**).*

Remarque. *Attention quand on dit que p.s, pour tout t, $X_t = \tilde{X}_t$, ce n'est pas la même chose que de dire pour tout t, p.s $X_t = \tilde{X}_t$. Implicitement dans le premier cas on pense $\mathbb{P}\left(\forall t,\ X_t = \tilde{X}_t\right)$, alors que dans le deuxième cas on pense au fait que pour tout t, $\mathbb{P}\left(X_t = \tilde{X}_t\right)$.*

Enfin, on aura besoin de la formule suivante pour calculer l'image par une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'une semimartingale, telle qu'elle est énoncée dans le livre [Wat89].

Théorème 3.10. *Soient $X_t = X_0 + M_t + A_t$ une semimartingale continue de martingale locale M_t et de processus à variations finies A_t, et où X_0 est une v.a. intégrable, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On a la formule*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \mathrm{d}\langle X \rangle_s.$$

On ne démontrera pas cette formule, mais une démonstration dans un cas particulier plus simple figure dans le livre [Bou04] et permet de se convaincre qu'elle est vraie.

3.2 Un processus remarquable : le processus de Poisson

Modéliser des phénomènes qui se produisent à des instants discrets peut être intéressant. Typiquement, on peut imaginer fixer en amont un ensemble discret de temps, et on fait un tirage aléatoire à chacun de ces temps prédéterminés. Mais on peut aussi imaginer que la durée qui s'écoule entre deux tirages successifs est elle-même aléatoire. C'est ce qui nous intéresse, car notre objectif à terme est de modéliser une population d'individus qui naissent et meurent au cours du temps, dont la taille sera décrite par un processus aléatoire $t \mapsto X_t$.

On sera donc amenés à étudier des processus indexés par $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui sont constants entre des temps de sauts aléatoires.

Définissons justement la notion mathématique représentant des temps de sauts aléatoires.

Définition 3.11. *Soit $(T_n)_n$ une suite p.s strictement croissante de v.a.r p.s strictement positives. On suppose que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \infty$. On dit que T_n est un* ***processus ponctuel*** *sur $\mathbb{R}_+$.*

Définition 3.12. *Soit T_n un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$. La* ***fonction aléatoire de comptage*** *associée au processus ponctuel T_n est définie de $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, par*

$$t \mapsto N_t := \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}.$$

On va enfin pouvoir définir le processus de Poisson qui est un processus ponctuel vérifiant certaines propriétés, grâce au polycopié [Mé09].

Définition 3.13. *Soit T_n un processus ponctuel à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Supposons de plus :*
- ***les accroissements sont indépendants****, i.e. pour tous $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, les accroissements $(N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, 1 \leq k \leq n)$ sont des v.a. indépendantes*
- ***les accroissements sont stationnaires****, i.e. pour tous $0 \leq s < t$, la loi de $N_t - N_s$ ne dépend que de s et t par la quantité $t-s$. On a donc $N_t - N_s \sim N_{t-s}$.*

On dit que ce processus est un ***processus de Poisson****.*

Proposition 3.14. *Soit $t \mapsto N_t$ la fonction aléatoire de comptage d'un processus de Poisson. Il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tous $0 \leq s < t$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$. On dira que λ est l'****intensité*** *du processus de Poisson.*

Preuve. La preuve suivra la démarche du polycopié [Mé09]. Soit N_t la fonction aléatoire de comptage d'un processus de Poisson.

Montrons que N_t suit une loi de Poisson, pour tout t.
Soit t un réel. Étudions la fonction génératrice de N_t. On pose $G_t : u \in [0,1] \to \mathbb{E}(u^{N_t})$, pour tout t réel. On veut montrer que $G_t(u) = e^{-\lambda t(1-u)}$, pour tout u, i.e. que c'est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre λt.

On remarque que pour tout $0 \leq s < t$, pour tous $u \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G_t(u) &= \mathbb{E}(u^{N_t}) = \mathbb{E}(u^{N_t - N_s + N_s - N_0}) \\ &= \mathbb{E}(u^{N_t - N_s})\mathbb{E}(u^{N_s - N_0}), \text{par accroissement indépendant} \\ &= G_{t-s}(u)G_s(u), \text{car les accroissements sont stationnaires.} \end{aligned}$$

Alors par raisonnement classique, pour tout rationnel x, pour tout u, $G_x(u) = G_1(u)^x$. On conclut par densité des rationnels, et grâce au caractère cadlag de $t \mapsto N_t$ qui implique celui de $t \mapsto G_t(u)$, pour tout u fixé, et par le théorème de continuité des intégrales à paramètres (on peut dominer par 1).
Ainsi, pour tout u, il existe un certain réel $\lambda(u)$ tel que $G_t(u) = e^{\lambda(u)t}$.

Montrons qu'en fait, pour tout u, $\lambda(u) = \lambda(0)(1-u)$.
Soit $u \in [0,1]$. On remarque que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{t}(1 - G_t(u)) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N_t = k)(1 - u^k) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \lambda(u)$.
On a donc l'encadrement suivant :

$$0 \leq \frac{1}{t}(1 - G_t(u)) - \frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t = 1)(1-u) = \frac{1}{t}\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(N_t = k)(1 - u^k) \leq \frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t \geq 2).$$

On veut pouvoir conclure par encadrement donc il faut évaluer $\frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t \geq 2)$ au voisinage de 0.
On écrit $\bigcup_n \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\}$. Donc par propriété d'accroissements indépendants et stationnaires,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t \geq 2}\}\right) = \sum_n \mathbb{P}(N_{nt} = 0)\mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t).$$

On en déduit le calcul suivant

$$\sum_n e^{-\lambda(0)nt}\mathbb{P}(N_t \geq 2) = (1-e^{-\lambda(0)t})^{-1}\mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t).$$

Or cette dernière quantité tend vers $\mathbb{P}(T_2 \leq T_1) = 0$ par définition. Mais comme, pour t suffisamment petit, $(\lambda(0)t)^{-1} \leq (1-e^{\lambda(0)t})^{-1}$, on en déduira finalement que $\frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t \geq 2)$ tend vers 0 quand t tend vers 0.,

Ainsi $\lambda(u) = \lim_{t\to,0} \frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t = 1)(1-u)$. □

Généralisons encore un peu la notion de processus de Poisson. En effet on aimerait avoir des fonctions de comptage sur des ensembles un peu plus compliqués, de sorte à ce que plus de paramètres interviennent dans l'intensité du processus. La suite de la sous-section ne figure pas dans le polycopié [Mé09], mais sera importante pour la section 4.

Définition 3.15. *Soient Q une v.a. à valeurs dans un ensemble de mesures sur $(E, \mathcal{E})$, et λ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. Supposons que :*
- *pour tout $A \in \mathcal{E}$, $Q(A) \sim \mathcal{P}(\lambda(A))$, où $\mathcal{P}$ est la loi de Poisson,*
- *pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ d'intersection vide, $Q(A)$ et $Q(B)$ sont indépendants.*

On dit alors que Q est une ***mesure de Poisson d'intensité*** *λ.*

Remarque. La fonction aléatoire de comptage d'un processus de Poisson telle que définie plus haut est une mesure de Poisson sur $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ d'intensité la mesure de Lebesgue.

Établissons quelques propriétés utiles liées aux mesures de Poisson.

Proposition 3.16. *Supposons $(E, \mathcal{E}) := (\mathbb{R}_+ \times F, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$. Soient Q une mesure de Poisson d'intensité λ, et $H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times F \to \mathbb{R}$ un processus progressif. On a :*
- *Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{E}(\int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}Q) = \mathbb{E}(\int \mathbb{1}_A \,\lambda(\mathrm{d}x))$.*
- *Soit $H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times F \to \mathbb{R}$ un processus progressif tel que $\mathbb{E}(\int_0^t \int_F |H(\omega, s, x)|\,|\lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)|) < +\infty$, alors*

$$\mathbb{E}(\int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, Q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)) = \mathbb{E}(\int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, \lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)).$$

En outre, le processus $\int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, Q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) - \int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, \lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ est une martingale.

Remarque. On remarque que $\int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, Q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta)$ ne s'inscrit pas dans le cadre de l'intégrale stochastique contre une semimartingale telle que décrite plus haut. On va cependant supposer que toutes les opérations qu'on va faire sont licites de même que pour l'intégrale précédente.

Preuve.

- Comme $Q(A) \sim \mathcal{P}(\lambda(A))$, on a $\mathbb{E}(\int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}Q) = \mathbb{E}(Q(A)) = \lambda(A)$. Or $\lambda(A) = \mathbb{E}(\int \mathbb{1}_A \,\lambda(\mathrm{d}x))$. Cela conclut.
- Supposons $\mathbb{E}(\int_0^t \int_F |H(\omega, s, x)|\,|\lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)|) < +\infty$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$M_t := \int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, Q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) - \int_0^t \int_F H(\omega, s, x)\, \lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

Déjà, le processus M_t est adapté à la même filtration que celle de la mesure de Poisson Q, d'après la construction de l'intégrale stochastique.
Ensuite, par linéarité, pour toute fonction étagée f, $\mathbb{E}(\int f \,\mathrm{d}Q) = \mathbb{E}(\int f \,\lambda(\mathrm{d}x))$. Enfin toute application mesurable $f : \mathbb{R}_+ \times F \to \mathbb{R}$ peut être approchée par une suite de fonction étagées h_n qui vérifient $|h_n| \leq |f|$, donc $\mathbb{E}(\int \int_F f(s, x)\, Q(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)) = \mathbb{E}(\int \int_F f(s, x)\, \lambda(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x))$, par convergence dominée.
Alors par des manipulations similaires à celles de la construction de l'intégrale stochastique, on obtient

$\mathbb{E}(\int_0^t \int_F H(\omega,s,x)\,Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)) = \mathbb{E}(\int_0^t \int_F H(\omega,s,x)\,\lambda(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x))$.
Ainsi, par inégalité triangulaire, M_t est $\mathbb{L}^1$, et enfin, pour tous $s \le t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t\,|\,\mathcal{F}_s) =&\mathbb{E}(\int_0^t \int_F H\,\mathrm{d}Q - \int_0^t \int_F H\,\mathrm{d}\lambda\,|\,\mathcal{F}_s)\\
=&\int_0^s \int_F H\,\mathrm{d}Q - \int_0^s \int_F H\,\mathrm{d}\lambda\\
&+\mathbb{E}(\int_s^t \int_F H\,\mathrm{d}Q - \int_s^t \int_F H\,\mathrm{d}\lambda\,|\,\mathcal{F}_s),\ \text{par } \mathcal{F}_s\text{-mesurabilité des deux premiers termes,}\\
=&M_s + \mathbb{E}(\int_0^{t-s} \int_F H\,\mathrm{d}Q\,|\,\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\int_0^{t-s} \int_F H\,\mathrm{d}\lambda\,|\,\mathcal{F}_0),\ \text{d'après la propriété de}\\
&\text{Markov faible, qui est vérifiée par toute solution d'une EDS,}\\
=&M_s + \mathbb{E}(\int_0^{t-s} \int_F H\,\mathrm{d}Q) - \mathbb{E}(\int_0^{t-s} \int_F H\,\mathrm{d}\lambda),\ \text{car } \mathcal{F}_0 \text{ est la tribu triviale,}\\
=&M_s
\end{aligned}$$

D'où M_t est une martingale.

□

Afin de calculer les moments du processus $\int_0^t \int_F H(\omega,s,x)\,Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \int_0^t \int_F H(\omega,s,x)\,\lambda(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$, ou plus généralement d'un processus qui s'écrit sous la forme d'une somme d'une intégrale par rapport à une mesure de Poisson et d'une intégrale par rapport à une mesure déterministe, on aura besoin de la formule suivante. Cette formule, donnée dans le livre [Ell15] dans un cadre un peu plus général, s'appelle la **formule d'Itô à sauts** et elle permet d'expliciter l'image par une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, plus généralement.

Théorème 3.17. *Soit $(F,\mathcal{F})$ un espace mesurable. Soient M_t une martingale locale de carré intégrable, A_t un processus adapté à variations finies, et X_0 une v.a. $\mathbb{L}^1$ et $\mathcal{F}_0$-mesurable. Soit enfin $Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ une mesure de Poisson, $a \in \mathbb{R}$, et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$ un mesurable.*
On pose $X_t := X_0 + M_t + A_t + \int_0^t \int_F a\mathbb{1}_A\,Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\theta)$. Alors on a pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s + \int_0^t \int [f(X_{s-}+a) - f(X_{s-})]\;Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\theta).$$

Remarque. *On pourrait croire que l'intégrale $\int_0^t \int_F a\mathbb{1}_A\,Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\theta)$ n'a pas été définie puisqu'on n'a défini les intégrales stochastiques que contre une semimartingale continue et non contre des mesures aléatoires de Poisson. Mais en fait, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$, on a $\int_{[0,t]\times F} a\mathbb{1}_A\,Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta) = aQ(A)$, par définition. C'est bien quelque chose qu'on connaît.*

Ce théorème est admis. Cependant, intuitivement, on peut se dire que les termes avec des intégrales par rapport à une mesure déterministe sont la partie continue du processus, transformée via f par la formule d'Itô du Théorème 3.10. De plus, les termes avec des intégrales par rapport à des mesures aléatoires sont des fonctions en escalier et représentent les sauts. On pourra trouver la démonstration dans un cadre simplifié mais plus accessible dans [Bou04].

3.3 Convergence de processus cadlag

Si à chaque paramètre de notre EDS, on associe la solution de l'EDS, on obtient une famille de processus. Pour étudier la dépendance des solutions en un paramètre, on peut notamment s'intéresser à des notions de convergence de processus. Nous nous intéresserons par la suite plus particulièrement à des familles de processus à trajectoires continues à droite et limitées à droite (on abrègera cela par cadlag). D'où l'intérêt de munir l'espace des fonctions cadlag d'une tribu. On commencera d'abord par le munir d'une topologie en utilisant le livre [Bil99].

On notera $\mathbb{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications cadlag de I un intervalle de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, qu'on appelera espace de Skorokhod. Posons pour tout n entier naturel, et pour tout λ bijection croissante de $[0, n]$ dans $[0, n]$, $\|\lambda\|_n^* = \sup_{s<t} \left|\log \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|$. On note Λ_n l'ensemble des bijections croissantes telles que $\|\lambda\|_n^* < +\infty$, qui est un ensemble de bijections strictement croissantes "proches" de l'identité lorsque $\|\lambda\|_n^*$ est petit. Puis on pose

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d_n(x, y)}{2^n},$$

où d_n est l'application

$$d_n : x, y \mapsto \inf_{\lambda \in \Lambda_n} \{\|\lambda\|_n^* \vee \|x - y \circ \lambda\|_{\infty,[0,n]}\}.$$

On peut se convaincre que l'application d est une distance. De plus, on peut aisément montrer, par caractérisation séquentielle de la borne inf, qu'une famille (f_K) de fonctions de $\mathbb{D}([0, N], \mathbb{R})$ converge vers f fonction cadlag ssi il existe λ_K une famille de fonctions de Λ_N telle que

$$\|f(\lambda_K(t)) - f(t)\|_{\infty,[0,N]} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0$$
$$\|\lambda_K - Id\|_{\infty,[0,N]} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0.$$

On admettra qu'elle rend l'espace **séparable et complet**.

Cette distance définit en outre une topologie. On munit alors $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ de la tribu borélienne associée, qu'on notera $\mathcal{B}$.
Cela permet donc de parler de v.a. à valeurs dans l'espace de Skorokhod. Le but est enfin de définir une notion de convergence de familles de v.a. de ce type.

Définition 3.18. *On dit qu'une famille d'un espace muni d'une toplogie $\mathcal{T}$ est* **relativement séquentiellement compacte** *ssi, de chacune de ses sous-suites, on peut extraire une sous-suite convergente. En particulier si une telle famille a une unique valeur d'adhérence, celle-ci converge pour la topologie $\mathcal{T}$.*

Il existe une propriété en général plus faible que la relative compacité séquentielle

Définition 3.19. *Soit (P_a) une famille de mesures de probabilités sur $\left(\mathbb{D}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d\right), \mathcal{B}\right)$. On dit que* ***la suite est tendue*** *ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout a, $\mathbb{P}_a(K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$.*

Dans un certain cadre, la propriété de tension suffit pour la relative compacité séquentielle.

Théorème 3.20 (de Prokhorov)**.** *Une famille de mesures de probabilités sur un espace métrique séparable et complet est tendue ssi elle est relativement séquentiellement compacte pour la topologie de la convergence étroite.*

En outre, il existe un critère de tension pratique à utiliser, qu'on admettra, et qui fournit finalement des outils très pratiques pour montrer la relative compacité séquentielle. Il est énoncé dans l'article [Met15].

Proposition 3.21 (critère d'Aldous-Rebolledo)**.** *Soit $X_t^K = X_0^K + A_t^K + M_t^K$ une famille de semimartingales à valeurs dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et dont la martingale locale est de carré intégrable.*
Supposons que pour tous η, $\epsilon > 0$, pour tout temps d'arrêt borné σ_K, il existe K_0, δ_0 tels que pour tous $K \geq K_0$ et $|\delta| < \delta_0$,

$$\mathbb{P}(|A_{\sigma_K+\delta}^K - A_{\sigma_K}^K| \geq \eta) \leq \epsilon, \text{ et } \mathbb{P}(|M_{\sigma_K+\delta}^K - M_{\sigma_K}^K| \geq \eta) \leq \epsilon.$$

Supposons en outre que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t > 0$ il existe N_0 tel que $\mathbb{P}(X_t \in [0, N_0]) \geq 1 - \epsilon$.
Sous ces hypothèses, la famille des distributions de ces semimartingales est tendue.

Remarque. La Proposition 3.21 est à rapprocher du théorème d'Ascoli qui permet de conclure quant à la relative compacité d'un ensemble fonctionnel. En effet les deux premières conditions coïncident avec la condition d'équi-continuité. La dernière fait penser à la condition de relative compacité de l'ensemble des évaluations en un point donné quelconque. Cette dernière condition est équivalente au caractère borné, dans le cas où l'ensemble d'arrivée des fonctions est un espace vectoriel normé de dimension finie (ici $\mathbb{R}$).

Dans la suite, on aura besoin du Lemme suivant pour passer d'une convergence en loi pour la topologie de Skorokhod à une convergence pour une topologie plus fine : celle de la convergence en loi uniforme.

Lemme 3.22. *Une famille de v.a. à valeurs dans l'espace* $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *qui converge en loi pour la topologie de Skorokhod vers une v.a. p.s continue converge en fait en loi pour la topologie de la convergence uniforme.*

Preuve. Soit X^K une famille de v.a. à valeurs dans l'espace de Skorokhod qui converge en loi pour la topologie de Skorokhod vers une v.a. p.s continue, disons $\overline{X}$. Soit N un entier naturel fixé. Soit f une fonction continue bornée. Soit λ_K une famille de fonctions de Λ_N telle que

$$\sup_{0\leq t\leq N} |\mathbb{E}(f(X^K_{\lambda_K(t)})) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_t))| \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0 \text{ et } \|\lambda_K - Id\|_{\infty,[0,N]} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0.$$

Déjà, l'application $t \mapsto \mathbb{E}(f(\overline{X}_t))$ est continue par théorème de continuité des intégrales à paramètres. Puis, comme on a

$$\|\mathbb{E}(f(X^K_t)) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_t))\|_{\infty,[0,N]} \leq \underbrace{\|\mathbb{E}(f(X^K_t)) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_{\lambda_K(t)}))\|_{\infty,[0,N]}}_{\xrightarrow[K\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\|\mathbb{E}(f(\overline{X}_{\lambda_K(t)})) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_t))\|_{\infty,[0,N]}}_{\xrightarrow[K\to+\infty]{} 0, \text{ par uniforme continuité}},$$

alors $X^K \xrightarrow[K\to+\infty]{\text{loi},\|\cdot\|_\infty} \overline{X}$. □

Enfin on a besoin d'un dernier théorème portant sur les convergences de suites de v.a., qui n'a cependant rien à voir avec ce qui précède, et qu'on admettra.

Théorème 3.23 (représentation de Skorokhod)**.** *Soit* (X_n) *une suite de v.a. et* X *une v.a. telle que* (X_n) *converge en loi vers* X*. Alors il existe* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* (Y_n) *une suite de v.a. sur cet espace probabilisé, ainsi que* Y *sur ce même espace, telles que pour tout* n*, les v.a.* Y_n *et* X_n *d'une part et* Y *et* X *d'autre part suivent les mêmes lois, et enfin telles que* (Y_n) *converge p.s. vers* Y*.*

4 Modélisation

Soient b, d_0, $d_1 > 0$. On pose $n(\mathrm{d}i) := \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \delta_m(\mathrm{d}i)$, où δ désigne classiquement le symbole de Kronecker. Grâce à toutes les notions précédemment mises en place, on va pouvoir modéliser l'évolution du nombre d'individus par une EDS et en étudier les solutions. Dans cette partie, les démonstrations vont suivre la démarche de l'article [Mé04], tout en se restreignant à un cadre moins général. En effet l'article étudie des familles de mesures aléatoires, tandis que nous nous intéresserons à des familles de v.a. qui se trouvent être des évaluations de ces mesures. De plus le modèle qu'on considérera ne prend pas en compte les intéractions entre les individus ni la spacialité du problème.

4.1 Approximation déterministe en grande population

On va modéliser une population dont la taille, qui évolue au cours du temps avec des processus de naissances et de morts, est de l'ordre de K, et représentée par le processus N^K_t. On suppose que la durée qui s'écoule entre deux instants de naissance consécutifs suit une loi exponentielle de paramètre b, i.e. qu'on a un processus ponctuel de Poisson. De façon similaire, la durée qui s'écoule entre deux instants de mort consécutifs suit une loi exponentielle de paramètre dépendant de la taille de la population $d(\frac{N^K}{K})$ en un sens qui restera à préciser.

Soient $Q^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i)$ et $Q^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta)$ des mesures de Poisson d'intensités respectivement $\lambda^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i) := b\,\mathrm{d}s \cdot n(\mathrm{d}i)$, et $\lambda^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta) := \mathrm{d}s \cdot n(\mathrm{d}i) \cdot \mathrm{d}\theta$. On pose $d : N \mapsto d_0 + d_1 N$.

Le processus N^K_t qui subit un processus de naissance au taux b et un processus de mort au taux $d(\frac{N^K}{K})$ vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{N^K_t}{K} = \frac{N^K_0}{K} + \frac{1}{K}\underbrace{\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i)}_{\text{naissances}} - \frac{1}{K}\underbrace{\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N^K_{s-}}{K})\}}\, Q^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta)}_{\text{morts}}. \qquad (5)$$

Remarque. *On peut se reporter à la remarque qui fait suite au Théorème 3.17 dans la section 3.1 pour se convaincre que les termes intégraux de notre EDS sont bien définis.*

En outre, l'existence et l'unicité d'une solution à cette EDS ne découle pas simplement du théorème 3.9, qui ne s'applique qu'à des EDS contre un mouvement brownien et contre une mesure de Lebesgue. Mais l'article [Met15], dans sa première section, définit les semimartingales discontinues et les intégrales contre celles-ci, via une autre notion de crochet. Cette deuxième notion de crochet coïncide avec celle qu'on a exposée en section 3.1 dans le cas des semimartingales continues. Cette nouvelle intégrale permet de définir une classe plus générale d'EDS qui comprend la nôtre, et dont on admettra l'existence d'une unique solution. En particulier 3.9 est supposé avoir une unique solution.

Notons que le processus N_t est un processus en escalier et cadlag. En effet Q^1 et Q^2 sont des mesures de Poisson, donc à valeurs dans les entiers, donc N_t aussi. C'est cohérent avec notre souhait que N_t représente le nombre d'individus.

On remarque aussi que le paramètre de mort affine comprend un terme constant de mort naturelle et un terme proportionnel à $\frac{N^K}{K}$, qui est en gros une densité d'individus, et qui représente le phénomène de mort par compétition.

Introduisons quelques notations

$$\begin{aligned}
M_t^K :=& \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) - \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\, \lambda^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) \\
&- \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N_{s-}^K}{K})\}}\, Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta) \\
&+ \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N_{s-}^K}{K})\}}\, \lambda^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta), \qquad (6)\\
A_t^K :=& \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\, \lambda^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) - \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N_{s-}^K}{K})\}}\, \lambda^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta) \qquad (7)\\
=& \int_0^t \frac{N_s^K}{K} b\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{N_s^K}{K} d(\frac{N_s^K}{K})\mathrm{d}s, \text{ d'après Fubini-Tonelli.}
\end{aligned}$$

On suppose que $N_0^{(K)}$ converge en loi vers $n_0 > 0$ lorsque K tend vers $+\infty$ et $\sup_K \mathbb{E}\left(\left(N_0^{(K)}\right)^3\right) < +\infty$.

Nous allons montrer que la suite de processus considérés obéissant à l'équation (5) converge vers un processus déterministe et régi par une EDO. Pour ce faire, on aura dans un premier temps besoin de montrer qu'on manipule en fait des semimartingales (étape 1). Puis on cherchera à obtenir des majorations des trois premiers moments de $\frac{N_t^K}{K}$ (étapes 2, 3 et 4), pour ensuite vérifier les critères de tension d'Aldous-Rebolledo (étape 5). Enfin on va vouloir montrer que toute valeur d'adhérence de notre suite est solution d'une EDO (étape 6), grâce à une évaluation du moment d'ordre deux passant par le calcul du crochet de $\frac{N_t^K}{K}$ de l'étape 3. Cela permettra, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, de conclure quant à la convergence de la suite.

Étape 1 *Fixons $K > 0$. On pose $\tau_M := \inf\{u, N_u^K \geq M\}$. Montrons que $\frac{N_t^K}{K}$ est une semimartingale locale, et que $t \mapsto \mathbb{E}(\frac{N_{t\wedge\tau_M}^K}{K})$ est continue.*
Par somme de deux martingales, et d'après le lemme 3.16, M_t^K telle que définie ci-dessus (6) est une martingale. De plus, A_t^K définie par (7) est la différence de deux processus croissants, donc c'est un processus à variations finies. Enfin, $\frac{N_t^K}{K} = \frac{N_0^K}{K} + M_t^K + A_t^K$, donc $\frac{N_t^K}{K}$ est bien une semimartingale.

Ensuite, $\{\tau_M \geq t\} = \{\sup_{s\leq t} N_s^K \geq M\}$, et comme $\sup_{s\leq t} N_s^K$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors τ_M est bien un temps d'arrêt. De plus, pour tous $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}(\frac{N^K_{t\wedge\tau_M}}{K}) - \mathbb{E}(\frac{N^K_{s\wedge\tau_M}}{K}) =& \mathbb{E}(\frac{1}{K}\int_{s\wedge\tau_M}^{t\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{u-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}u,\mathrm{d}i)) \\
& \underbrace{-\mathbb{E}(\frac{1}{K}\int_{s\wedge\tau_M}^{t\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{u-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N^K_{u-}}{K})\}}\, Q^2(\mathrm{d}u,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta))}_{\leq 0} \\
\leq& \mathbb{E}(\frac{1}{K}\int_s^t\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{u-\wedge\tau_M}\}}\, Q^1(\mathrm{d}u,\mathrm{d}i)), \text{ par distinction des cas } s\leq\tau_M \text{ et } s>\tau_M \\
\leq& \int_s^t \mathbb{E}(\frac{N^K_{u\wedge\tau_M}}{K})\cdot b\mathrm{d}u \leq \int_s^t b\frac{M}{K} \xrightarrow[s\to t]{} 0,
\end{aligned}$$

d'où la continuité de $t\mapsto \mathbb{E}(\frac{N^K_{t\wedge\tau_M}}{K})$ par encadrement.

<u>Étape 2</u> *Montrons que pour tout $t>0$, $\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}\frac{N^K_s}{K})<\infty$. On en déduira que $\tau_M \xrightarrow[M\to\infty]{p.s} +\infty$ puis* $\sup_K \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}\frac{N^K_s}{K}) < +\infty$.
Sur $\{t\leq T\wedge\tau_M\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{N^K_t}{K} &= \frac{N^K_0}{K} + \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) - \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\mathbb{1}_{\left\{\theta\leq d\left(\frac{N^K_{s-}}{K}\right)\right\}}\, Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta) \\
&\leq \frac{N^K_0}{K} + \frac{1}{K}\int_0^{T\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i).
\end{aligned}$$

D'où en passant au sup sur $t\in[0,T\wedge\tau_M]$ puis en passant à l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{[0,T\wedge\tau_M]}\frac{N^K_t}{K}\right) &\leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{K}\int_0^{T\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i)\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \frac{1}{K}\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\left\{i\leq N^K_{s-\wedge\tau_M}\right\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i)\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \frac{1}{K}\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N^K_{s-\wedge\tau_M}\}}\, \lambda^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i)\right), \text{d'après le lemme 3.16} \\
&\leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{N^K_{s\wedge\tau_M}}{K}\cdot b\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \int_0^T \mathbb{E}(\frac{N^K_{s\wedge\tau_M}}{K})\cdot b\,\mathrm{d}s, \text{par Fubini -Tonelli.}
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{E}(\frac{N^K_{T\wedge\tau_M}}{K}) \leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + b\int_0^T \mathbb{E}(\frac{N^K_{s\wedge\tau_M}}{K})\mathrm{d}s$. D'après le lemme de Gronwall appliqué à $t\mapsto\mathbb{E}(\frac{N^K_{t\wedge\tau_M}}{K})$ qui est continue d'après l'étape 1, on en déduit que

$$\mathbb{E}(\frac{N^K_{t\wedge\tau_M}}{K}) \leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K})e^{bt}.$$

Si on reprend le calcul précédent, on trouve

$$\mathbb{E}\left(\sup_{[0,T\wedge\tau_M]}\frac{N^K_t}{K}\right) \leq \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K}) + \int_0^T \mathbb{E}(\frac{N^K_0}{K})e^{bs}\cdot b\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Ainsi on a trouvé une borne indépendante de M pour la quantité $\mathbb{E}\left(\sup_{[0,T\wedge\tau_M]}\frac{N^K_t}{K}\right)$.

Déduisons-en que $\tau_M \xrightarrow[M\to\infty]{p.s} +\infty$. Remarquons tout d'abord que nous ne connaissons le concept de convergence p.s *a priori* que dans le cadre de familles dénombrables de v.a. En effet, il faut que

$$\left\{\omega, \tau_M(\omega) \xrightarrow[M\to\infty]{p.s} +\infty\right\}$$

soit mesurable. Or ici, on remarque que τ_M est une famille p.s croissante de v.a., donc

$$\{\omega, \tau_M(\omega) \xrightarrow[M\to\infty]{p.s} +\infty\} = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcap_{M\geq n} \{\tau_M \geq m\}}_{=\{\tau_n\geq m\}} \in \mathcal{F}_\infty.$$

La notion de convergence p.s a donc bien un sens ici.

Supposons par l'absurde que τ_M ne tend pas p.s vers $+\infty$.
Alors par croissance de τ_M, il existe un réel $A_0 > 0$ tel que $\mathbb{P}(\sup_M \tau_M \leq A_0) > 0$. Intuitivement, cela voudrait dire qu'il y a explosion en temps fini, car l'événement "tout seuil aussi grand soit-il soit dépassé au plus au temps A_0" est non négligeable. Le résultat auquel on voudrait aboutir ressemble au théorème des bouts.
On écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{[0,A_0\wedge\tau_M]} N_t^K\right) &= \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq A_0\wedge\tau_M} N_t^K \cdot \mathbb{1}_{\{\sup_m \tau_m \leq A_0\}}\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq A_0\wedge\tau_M} N_t^K \cdot \mathbb{1}_{\{\sup_m \tau_m > A_0\}}\right)}_{\geq 0} \\ &\geq MK\,\mathbb{P}\left(\sup_M \tau_M \leq A_0\right).\end{aligned}$$

C'est en contradiction avec l'inégalité (8).

D'où $\tau_M \xrightarrow[M\to\infty]{p.s} +\infty$.

Ainsi, $\left(\sup_{0\leq t\leq T\wedge\tau_M} N_t^K\right)_M$ est une famille de v.a. positive qui tend vers $\sup_{0\leq t\leq T} N_t^K$ p.s. Le lemme Fatou permet de faire tendre M vers $+\infty$ dans l'inégalité (8) et de trouver $\mathbb{E}\left(\sup_{[0,T]} N_t^K\right) \leq \mathbb{E}(N_0^K) + \int_0^T \mathbb{E}(N_0^K)e^{bs} \cdot b\,\mathrm{d}s < +\infty$, et donc en fait

$$\sup_K \mathbb{E}\left(\sup_{[0,T]} \frac{N_t^K}{K}\right) < +\infty$$

<u>Étape 3</u> *On veut calculer la variation quadratique de (M_t^K). On en déduira que M^K est de carré intégrable.*
Calculons le carré de N_t^K de deux façons différentes.
D'après la formule d'Itô du Théorème 3.10 appliquée à la fonction $x \mapsto x^2$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\begin{aligned}(N_t^K)^2 =& (N_0^K)^2 + \int_0^t 2N_s^K\,\mathrm{d}N_s^K + \langle KM^K\rangle_t \\ =& (N_0^K)^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} 2N_s^K\,\mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}}\,Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+} 2N_s^K\,\mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}} \mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N_{s-}^K}{K})\}}\,Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta) + K^2\langle M^K\rangle_t.\end{aligned}$$

De plus, par application de la formule d'Itô à sauts du Théorème 3.17, on trouve

$$\begin{aligned}(N_t^K)^2 =& (N_0^K)^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}} \left[(N_{s-}^K+1)^2 - (N_{s-}^K)^2\right] Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq N_{s-}^K\}} \mathbb{1}_{\{\theta\leq d(\frac{N_{s-}^K}{K})\}} \left[(N_{s-}^K-1)^2 - (N_{s-}^K)^2\right] Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta).\end{aligned}$$

Si on fait la différence des deux dernières formules obtenues, on trouve

$$\langle M^K\rangle_t = \frac{1}{K^2}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-}\}}\, Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i) + \frac{1}{K^2}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\le d(\frac{N_{s-}}{K})\}}\, Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta).$$

Si on passe aux espérances, on trouve $\mathbb{E}(\langle M^K\rangle_t) = \frac{1}{K}\int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{N^K_s}{K}(b+d(\frac{N^K_s}{K})\right]\mathrm{d}s$. Or l'étape 1 et un raisonnement similaire qu'on appliquerait au carré avec la formule d'Itô classique permettrait d'avoir le caractère borné de ce terme. En outre par définition, $(M^K_t)^2 - \langle M^K\rangle_t$ est une martingale, donc $\mathbb{E}((M^K_t)^2) < +\infty$, et $V(M^K_t) = \mathbb{E}((M^K_t)^2) = \mathbb{E}(\langle M^K\rangle_t)$.
Ainsi M^K_t est une martingale de carré intégrable.

Étape 4 *Montrons que pour tout $T>0$, $\sup_K \mathbb{E}\left(\sup_{s\le T}\left(\frac{N^K_s}{K}\right)^3\right) < +\infty$.*
D'après la formule d'Itô avec sauts du Théorème 3.17, on trouve

$$\begin{aligned}(N^K_t)^3 =&(N^K_0)^3 + \int_0^t\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-}\}}\left[(N^K_{s-}+1)^3-(N^K_{s-})^3\right] Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i)\\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\le d(\frac{N^K_{s-}}{K})\}}\left[(N^K_{s-}-1)^3-(N^K_{s-})^3\right] Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta).\end{aligned}$$

De façon similaire à l'étape 2, sur l'événement $\{t\le T\wedge\tau_M\}$

$$\begin{aligned}(N^K_t)^3 \le&(N^K_0)^3 + \int_0^T\int_{\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-\wedge\tau_M}\}} \underbrace{(3(N^K_{s-\wedge\tau_M})^2+3N^K_{s-\wedge\tau_M}+1)}_{\le 7(N^K_{s-\wedge\tau_M})^3,\text{ car } N \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}} Q^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i)\\ &+\int_0^T\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\le N^K_{s-\wedge\tau_M}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\le d(\frac{N^K_{s-\wedge\tau_M}}{K})\}} 3N^K_{s-\wedge\tau_M}\, Q^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}i,\mathrm{d}\theta)\\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\le T\wedge\tau_M}(N^K_t)^3\right) \le&\mathbb{E}\left((N^K_0)^3\right) + \int_0^T 7\mathbb{E}((N^K_{s-\wedge\tau_M})^3)\cdot b\mathrm{d}s + \int_0^T \mathbb{E}\left(3(N^K_{s-\wedge\tau_M})^2 d\left(\frac{N^K_{s-\wedge\tau_M}}{K}\right)\right)\mathrm{d}s\\ \le&\mathbb{E}\left((N^K_0)^3\right) + \int_0^T (7b+3(d_0+d_1))\,\mathbb{E}\left(\sup_{u\le s\wedge\tau_M}(N^K_u)^3\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire à celui de l'étape 2 nous montrerait que $T\mapsto \mathbb{E}(\sup_{t\le T\wedge\tau_M}\left(N^K_t\right)^3)$ est continue. Donc par application du lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}(\sup_{t\le T\wedge\tau_M}(N^K_t)^3) \le \mathbb{E}((N^K_0)^3)e^{(7b+3(d_0+d_1))T}.$$

Enfin, comme $(\sup_{t\le T\wedge\tau_M}(N^K_t)^3)_M$ est une suite de v.a. positives qui croît vers $\sup_{t\le T} N^3_t$, par application du lemme de convergence monotone puis passage au sup en K,

$$\sup_K \mathbb{E}(\sup_{t\le T}\left(\frac{N^K_t}{K}\right)^3) \le \sup_K \mathbb{E}\left(\left(\frac{N^K_0}{K}\right)^3\right)e^{(7b+3(d_0+d_1))T} < +\infty.$$

Étape 5 *Pour tout $K\ge 1$, on note $\mathbb{P}_K$ la distribution de $\frac{N^K_t}{K}$. Montrons que la famille $(\mathbb{P}_K)_{K\ge1}$ est relativement séquentiellement étroitement compacte.*
Utilisons le critère d'Aldous-Rebolledo du Théorème 3.21 pour montrer que $(\frac{N^K_t}{K})_{t\ge0}$ est tendue.
Soient η, $\epsilon>0$, et σ_K un temps d'arrêt tel que $\sigma_K < \sigma_K+\delta < T$.

On s'occupe d'abord du processus à variations finies. On a la majoration suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|A^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}| \geq \eta) &\leq \frac{\mathbb{E}(|A^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}|)}{\eta}, \text{ par inégalité de Markov} \\
&= \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\left|\int_{\sigma_K\wedge\tau_M}^{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} \left[b\frac{N^K_s}{K} - d(\frac{N^K_s}{K})\frac{N^K_s}{K}\right] \mathrm{d}s\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^\delta \left[b\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K} - d(\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K})\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K}\right] \mathrm{d}s\right|\right) \text{ (cf étape 1)} \\
&\leq \frac{1}{\eta}\int_0^\delta \mathbb{E}\left(b\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K} + d(\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K})\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K}\right) \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\delta}{\eta}\mathbb{E}\left((b+d_0)\sup_{0\leq s\leq T}\frac{N^K_s}{K} + d_1\sup_{0\leq s\leq T}(\frac{N^K_s}{K})^2\right) \\
&\leq \frac{\delta}{\eta}(b+d_0+d_1)\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T}(\frac{N^K_s}{K})^2).
\end{aligned}$$

Donc pour δ suffisamment petit, $\mathbb{P}(|A^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}| \geq \eta) \leq \epsilon$. Puis, grâce au lemme de Fatou appliqué à la suite croissante de v.a. positives $\left(\mathbb{1}_{|A^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}|\geq\eta}\right)_M$ qui converge vers $\mathbb{1}_{|A^K_{\sigma_K+\delta} - A^K_{\sigma_K}|\geq\eta}$, on trouve que

$$\mathbb{P}(|A^K_{\sigma_K+\delta} - A^K_{\sigma_K}| \geq \eta) \leq \frac{\delta}{\eta}(b+d_0+d_1)\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T}(\frac{N^K_s}{K})^2).$$

Passons maintenant à la martingale. On a les inégalités

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|M^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - M^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}| \geq \eta) &\leq \frac{\mathbb{E}(|M^K_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - M^K_{\sigma_K\wedge\tau_M}|)}{\eta} \\
&\leq \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\int_{\sigma_K\wedge\tau_M}^{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} \frac{2N^K_s}{K}(b + d(\frac{N^K_s}{K}))\,\mathrm{d}s\right), \text{par inégalités triangulaires} \\
&\leq \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\int_0^\delta 2\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K}(b + d(\frac{N^K_{(\sigma_K+s)\wedge\tau_M}}{K}))\,\mathrm{d}s\right), \text{de même qu'à l'étape 1} \\
&\leq (b+d_0+d_1)(1+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}(\frac{N^K_s}{K})^2\right)).
\end{aligned}$$

Donc pour δ suffisamment petit, et à nouveau par application du lemme de Fatou,

$$\mathbb{P}(|M^K_{\sigma_K+\delta} - M^K_{\sigma_K}| \geq \eta) \leq \epsilon.$$

Assurons-nous qu'on a bien le dernier point du critère de tension. Pour $0 \leq t \leq T$, par inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(\frac{N^K_t}{K} > n\right) \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\frac{N^K_t}{K}\right) \leq \frac{1}{n}\underbrace{\sup_{K\geq 1}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}\frac{N^K_s}{K}\right)}_{<+\infty \text{ d'après l'étape 2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, $t \geq 0$, il existe $n_0(t,\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}\left(\frac{N^K_t}{K} \in [0, n_0(t,\epsilon)]\right) \geq 1-\epsilon$.

Ainsi on a vérifié que le critère de tension du Théorème 3.21 s'appliquait à la suite $(\mathbb{P}_k)_{K\geq 1}$, qui est donc relativement séquentiellement étroitement compacte.

Étape 6 *Montrons que $(\frac{N^K_t}{K})_{t\geq 0}$ converge en loi dans l'espace de Skorokhod, disons vers $(n_t)_{t\geq 0}$.*
Soit $\overline{N}$ un processus cadlag qui est valeur d'adhérence (au sens de la convergence en loi) de la famille $(\frac{N^K_t}{K})_{K\geq 1}$. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer sans perte de généralité que $\frac{N^K}{K}$ converge en loi vers $\overline{N}$.

Pour tout T et tout $0 \leq t \leq T$,

$$\left| \frac{N_t^K}{K} - \frac{N_{t-}^K}{K} \right| \overset{\text{p.s}}{\leq} \frac{1}{K}.$$

Or si on pose pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \{t \in [0,T]\,, \mathbb{P}(|N_t^n - N_{t-}^n)| > 0) > 0\},$$

qui est dénombrable, on trouve que

$$\left(\forall t \in [0,T]\,, \mathbb{P}\left(|N_t^n - N_{t-}^n| \leq \frac{1}{n}\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\forall t \in D_n,\ \mathbb{P}\left(|N_t^n - N_{t-}^n| \leq \frac{1}{n}\right) = 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\forall t \in D_n,\ |N_t^n - N_{t-}^n| \leq \frac{1}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\forall t \in \cup_{k\in\mathbb{N}^*} D_k,\ |N_t^n - N_{t-}^n| \leq \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Donc $\overline{N}_.$ est continue p.s et la convergence est en fait uniforme d'après le Théorème 3.22.

On pose maintenant pour tout $t \geq 0$, $\Psi_t : y_. \mapsto y_t - y_0 - \int_0^t (by_s - d_0 y_s - d_1 y_s^2)\,\mathrm{d}s$ une application de l'ensemble des applications cadlag dans l'ensemble des applications cadlag. Cette application est clairement linéaire et continue. On veut montrer que $\sup_{t\leq T} \Psi_t(\overline{N}_.) = 0$ p.s. Or, pour tout t,

$$\Psi_t\left(\frac{N_t^K}{K}\right) = A_t^K + M_t^K - \int_0^t \left[b\frac{N_s^K}{K} - d_0\frac{N_s^K}{K} - d_1\left(\frac{N_s^K}{K}\right)^2\right]\mathrm{d}s = M_t^K.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_.^K|^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^K|\right)^2\right] \\
&\leq 4\mathbb{E}\left(\langle M^K\rangle_T\right),\ \text{par inégalité de Doob 2.12} \\
&\leq 4\frac{T}{K}(b+d_0+d_1)\mathbb{E}\left(1 + \sup_{0\leq s\leq T}\left(\frac{N_s^K}{K}\right)^2\right),\ \text{d'après l'étape 3} \\
&\leq \underbrace{4\frac{T}{K}(b+d_0+d_1)\left[1 + \sup_{K\geq 1}\mathbb{E}\left(\frac{N_0^2}{K^2}\right)e^{7b+3(d_0+d_1))T}\right]}_{\xrightarrow[K\to+\infty]{}0},\ \text{d'après l'étape 4.}
\end{aligned}$$

Ainsi $\sup_{t\leq T} \Psi_t(\overline{N}_.) = 0$ p.s. On veut maintenant pouvoir intervertir limite en K et espérance. Or

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0}\left|\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right| \mathbb{1}_{\left|\sup_{0\leq t\leq T}\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right|\geq a}\right) \leq \frac{1}{a}\underbrace{\sup_{K\geq 1}\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right|^2\right]}_{<+\infty} \xrightarrow{a\to+\infty} 0.$$

Donc la famille considérée est uniformément intégrable. On donc une convergence $\mathbb{L}^1$ qui permet l'interversion suivante :

$$0 = \lim_{K\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right|\right] = \mathbb{E}\left(\lim_{K\to+\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi_t\left(\frac{N_.^K}{K}\right)\right|\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\Psi_t\left(\overline{N}_.\right)\right|\right),$$

car $t \mapsto \Psi_t(y)$ est continue sur le compact $[0,T]$ pour tout y. Donc le sup est atteint, ce qui justifie la dernière égalité.

On en déduit que $\sup_{0\leq t\leq T}\Psi_t\left(\overline{N}_.\right) = 0$ p.s, et donc $t \mapsto \Psi_t\left(\overline{N}_.\right)$ est p.s identiquement nulle.

Ainsi, grâce à la continuité de $\overline{N}_{.}$, on trouve que $\overline{N}_{.}$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= (b - d(y))y \\ y(0) &= n_0, \end{cases} \tag{9}$$

qui admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz car le second membre est un polynôme du second degré donc lipschitzien par rapport à la variable d'état y. Cela permet dès lors de montrer que notre famille $\left(\frac{N^K_{\cdot}}{K}\right)_K$ admet une unique valeur d'adhérence. Or la famille est aussi séquentiellement relativement compacte donc par définition, la famille converge vers la solution du problème de Cauchy (9).

4.2 Convergence vers un mouvement brownien

Soit $\sigma > 0$.
On peut deviner que, si les instants de sauts se rapprochent, notre processus va de plus en plus ressembler à un mouvement brownien. Or pour faire en sorte que les sauts se rapprochent, il faut que les taux de naissances et de morts augmentent avec la taille caractéristique de la population. On peut par exemple choisir le taux de naissance $b_K = \sigma K + b$ et le taux de mort $\sigma K + d\left(\frac{N^K_t}{K}\right)$. Pour notre modèle, le fait que le taux de morts soit linéaire en la taille caractéristique de la population peut s'interpréter comme un phénomène de prédation ou sélection. Cela traduit l'hypothèse que plus la population est grande, moins l'environnement sera propice à la vie des individus. Le terme linéaire du taux de naissance signifie que plus la population est grande plus les individus se reproduisent. Le réalisme de ces hypothèses nous intéresse moins que les résultats mathématiques qui en découlent.
On pose donc $\lambda^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}i \cdot \mathrm{d}\theta$, $\lambda^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}i \cdot \mathrm{d}\theta$, et Q^1 et Q^2 des mesures de Poisson indépendantes dont les mesures d'intensité respectives sont λ^1 et λ^2. On pose enfin $d_K : N \mapsto \sigma K + d_0 + d_1 N$ qui sera notre nouveau taux de morts. L'EDS de l'équation (5) devient :

$$\begin{aligned} N^{(K)}_t = N^{(K)}_0 &+ \frac{1}{K}\int_0^t \int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i \leq K N^{(K)}_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{\theta \leq b_K\}}\, Q^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta) \\ &- \frac{1}{K}\int_0^t \int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i \leq K N^{(K)}_{s-}\}} \mathbb{1}_{\left\{\theta \leq d_K\left(N^{(K)}_{s-}\right)\right\}}\, Q^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta). \end{aligned} \tag{10}$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} M^{(K)}_t :=& \frac{1}{K}\int_0^t \mathbb{1}_{\{i \leq K N^{(K)}_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{\theta \leq b_K\}}\, Q^1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i) - \int_0^t N^{(K)}_s\, b_K \mathrm{d}s \\ &- \frac{1}{K}\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i \leq N^K_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{\theta \leq d_K(\frac{N^K_{s-}}{K})\}}\, Q^2(\mathrm{d}s, \mathrm{d}i, \mathrm{d}\theta) + \int_0^t N^{(K)}_s d_K(N^{(K)}_s) \mathrm{d}s, \\ A^{(K)}_t :=& \int_0^t N^{(K)}_s (b - d_0 - d_1 N^{(K)}_s)\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On suppose que $N^{(K)}_0$ converge en loi vers N_0 une v.a. positive, lorsque K tend vers $+\infty$. On suppose également que $\sup_K \mathbb{E}\left((N^{(K)}_0)^3\right) < +\infty$.

Nous allons montrer que la suite de processus considérés obéissant aux équations ci-dessus converge vers un processus stochastique régi par une équation différentielle stochastique avec une perturbation par un terme brownien. Pour ce faire, grâce à des évaluations des trois premiers moments (étape 1), on va montrer qu'on a une suite de semimartingales tendue. Puis on va montrer que toute valeur d'adhérence est solution d'une même EDS, ce qui montrera la convergence de la suite (étape 2).
<u>Étape 1</u> *Montrons que* $\sup_K \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(N^{(K)}_t) < +\infty$ *puis* $\sup_K \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left((N^{(K)}_t)^3\right)$.
Soit K fixé. On pose de même que précédemment $\tau_M := \inf\{u, K N^{(K)}_u \geq M\}$. En négligeant le terme de mort

dans l'expression du processus arrêté $N^{(K)}_{s\wedge\tau_M}$ déduite de (10), on a les inégalités suivantes pour tous $s \leq t$

$$\begin{aligned}
N^{(K)}_{s\wedge\tau_M} &\leq N^{(K)}_0 + \frac{1}{K}\int_0^{s\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq KN^{(K)}_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1 \\
&\leq N^{(K)}_0 + \frac{1}{K}\int_0^{t\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq KN^{(K)}_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1, \text{ donc}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} N^{(K)}_{s\wedge\tau_M}\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t\wedge\tau_M} N^{(K)}_s\right) &\leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \frac{1}{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq KN^{(K)}_{s-}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}s\, n(\mathrm{d}i)\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&\leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^t N^{(K)}_{s-\wedge\tau_M}\, b_K \mathrm{d}s\right) \\
&\leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s} N^{(K)}_{u-\wedge\tau_M}\right) b_K \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit par le lemme de Gronwall que

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq t\wedge\tau_M} N^{(K)}_s) \leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0)e^{b_K t}.$$

Donc à K fixé, $\tau_M \xrightarrow[M\to+\infty]{p.s} +\infty$.

En outre

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N^{(K)}_{t\wedge\tau_M}) &= \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \frac{1}{K}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_M}\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{i\leq KN^{(K)}_s\}}\left[\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}} - \mathbb{1}_{\left\{\theta\leq d_K\left(N^{(K)}_s\right)\right\}}\right]\mathrm{d}s\right) \\
&= \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_M} N^{(K)}_s(b-d_0-d_1N^{(K)}_s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_M} N^{(K)}_s(b-d_0)\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0) + \max(0,b-d_0)\mathbb{E}\left(\int_0^t N^{(K)}_{s\wedge\tau_M}(b-d_0)\,\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité précédente, d'après le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\mathbb{E}(N^{(K)}_{t\wedge\tau_M}) \leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0)e^{\max(0,b-d_0)t} \leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0)e^{\max(0,b-d_0)T}.$$

Après avoir fait tendre M vers $+\infty$ dans cette dernière inégalité grâce au lemme de Fatou, on trouve

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{E}(N^{(K)}_t) \leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0)e^{\max(0,b-d_0)t} \leq \mathbb{E}(N^{(K)}_0)e^{\max(0,b-d_0)T}.$$

Ainsi, par hypothèse, on tombe sur le caractère borné du moment d'ordre un.

$$\sup_K\sup_{t\leq T}\mathbb{E}(N^{(K)}_{t\wedge\tau_M}) < +\infty.$$

Traitons maintenant du moment d'ordre deux. On trouve la formule suivante après avoir pris l'espérance de la formule d'Itô du Théorème 3.10 appliqué à $N^{(K)}_t$ avec la fonction $x\mapsto x^2$, pour tout $t\leq T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((N^{(K)}_t)^2\right) &= \mathbb{E}\left((N^{(K)}_0)^2\right) + \frac{2}{K}\int_0^t K\mathbb{E}\left[(N^{(K)}_s)^2(b_K - d_K(N^{(K)}_s))\right]\mathrm{d}s + \frac{1}{K^2}\int_0^t \mathbb{E}\left[KN^{(K)}_s(b_K+d_K(N^{(K)}_s))\right]\mathrm{d}s \\
&\leq \mathbb{E}\left((N^{(K)}_0)^2\right) + \frac{b_K+d_0}{K}\int_0^T \mathbb{E}(N^{(K)}_s)\,\mathrm{d}s + \left(2(b-d_0)+\frac{d_1}{K}\right)\int_0^T \mathbb{E}\left((N^{(K)}_s)^2\right)\mathrm{d}s \\
&\leq \underbrace{\mathbb{E}\left((N^{(K)}_0)^2\right) + (b_K+d_0)\int_0^T \mathbb{E}(N^{(K)}_s)\,\mathrm{d}s}_{\text{majoré par un terme indépendant de } K \text{ et de } t} + (2(b-d_0)+d_1)\int_0^T \sup_{u\leq s}\mathbb{E}\left((N^{(K)}_u)^2\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'où par passage au sup sur $t \in [0,T]$, puis par application du lemme de Gronwall,

$$\sup_K \sup_{t\leq T} \mathbb{E}\left((N_t^{(K)})^2\right) < +\infty.$$

Le moment d'ordre deux est donc borné.
On va désormais s'intéresser au crochet de M pour déduire de ce qui précède que $\sup_K \mathbb{E}\left((M_t^{(K)})^2\right) < +\infty$. On procède comme avant en calculant le carré de N de deux façons différentes.
D'après la formule d'Itô classique, on a

$$\begin{aligned}(N_t^{(K)})^2 =& N_0^{(K)} + \int_0^t 2N_s^{(K)}\,\mathrm{d}A_s^{(K)} + \langle M^{(K)}\rangle_t + \text{ martingale}\\ =& \int_0^t 2(b-d_0-d_1N_s^{(K)})(N_s^{(K)})^2\,\mathrm{d}s + \langle M^{(K)}\rangle_t \ + \text{ martingale.}\end{aligned}$$

D'après la formule d'Itô à sauts, on a

$$(N_t^{(K)})^2 = N_0^{(K)} + \int_0^t 2(N_{s-}^{(K)})^2(b-d_0-d_1N_{s-}^{(K)})\,\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\int_0^t N_{s-}^{(K)}(2\sigma K + b + d_0 + d_1 N_{s-}^{(K)})\,\mathrm{d}s + \text{ martingale,}$$

car d'après la Proposition 3.16,

$$\begin{aligned}&\int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+} \left(\frac{2}{K}N_{s-}^{(K)} + \frac{1}{K^2}\right)\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1\\ &\quad + \int_{[0,t]\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+}\left(-\frac{2}{K}N_{s-}^{(K)} + \frac{1}{K^2}\right)\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d_K(N_{s-}^{(K)})\}}\,\mathrm{d}Q^2\\ &\quad - \int_0^t 2\left(b-d_0-d_1N_s^{(K)}\right)(N_s^{(K)})^2\,\mathrm{d}s - \frac{1}{K}\int_0^t N_{s-}^{(K)}\left(2\sigma K + b + d_0 + d_1N_{s-}^{(K)}\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

est une martingale.
D'après l'unicité de la décomposition de Doob de la Proposition 2.18, on aboutit, par identification des processus à accroissements finis des deux formules de $(N_s^{(K)})^2$, à la formule

$$\langle M^{(K)}\rangle_t = \int_0^t 2\sigma N_s^{(K)}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\int_0^t N_s^{(K)}(b+d_0+d_1N_s^{(K)})\,\mathrm{d}s.$$

On peut facilement déduire de la formule précédente que

$$\mathbb{E}\left((M_t^{(K)})^2\right) < +\infty.$$

On se charge maintenant du moment d'ordre trois, à la manière de ce qui a été fait en section 4.1., étape 4. D'après la formule d'Itô du Théorème 3.10 appliquée à la fonction $x \mapsto x^3$, pour tout $t \leq T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((N_t^{(K)})^3\right) =& \mathbb{E}(N_0^{(K)}) + \frac{1}{K^3}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1 - \frac{1}{K^3}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d_K(N_{s-}^{(K)}\}}\,\mathrm{d}Q^2\\ &+ \frac{3}{K^2}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1 + \frac{3}{K^2}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d_K(N_{s-}^{(K)}\}}\,\mathrm{d}Q^2\\ &+ \frac{3}{K}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq b_K\}}\,\mathrm{d}Q^1 - \frac{3}{K}\int_0^t\int_{\mathbb{N}^*}\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\{i\leq KN_{s-}^{(K)}\}}\mathbb{1}_{\{\theta\leq d_K(N_{s-}^{(K)}\}}\,\mathrm{d}Q^2, \text{ d'où}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((N_t^{(K)})^3\right) =& \frac{1}{K^2}\int_0^t \mathbb{E}\left[N_s^{(K)}(b-d_0-d_1N_s^{(K)}\right])\,\mathrm{d}s + \frac{3}{K}\int_0^t \mathbb{E}\left[(N_s^{(K)})^2(b_K + d_K(N_s^{(K)}))\right]\mathrm{d}s\\ &+ 3\int_0^t \mathbb{E}\left[(N_s^{(K)})^3(b-d_0-d_1N_s^{(K)})\right]\mathrm{d}s\\ \leq& \underbrace{\frac{\max(0,b-d_0)}{K^2}\int_0^T \mathbb{E}(N_s^{(K)})\,\mathrm{d}s + (6\sigma+3d_0)\int_0^T \sup_{u\leq s}\mathbb{E}\left((N_u^{(K)})^2\right)\mathrm{d}s}_{\text{majoré par un terme indépendant de } K \text{ et de } t}\\ &+ 3(b-d_0+d_1)\int_0^T \mathbb{E}\left((N_s^{(K)})^3\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Donc de même que pour le moment d'ordre deux, $\sup_K \sup_{t\le T} \mathbb{E}\left((N_t^{(K)})^3\right) < +\infty$.

Utilisons ceci pour montrer ensuite que $\sup_K \mathbb{E}\left(\sup_{t\le T} N_t^{(K)}\right) < +\infty$ pour tout T. Soit $T>0$. En utilisant la décomposition de Doob de $N_t^{(K)}$ et en négligeant les termes négatifs de la partie à variation finie, on trouve la majoration suivante

$$N_t^{(K)} \le N_0^{(K)} + \int_0^T \sup_{u\le s} N_u^{(K)}\, b\mathrm{d}s + \left|\sup_{t\le T} M_t^{(K)}\right|.$$

Le majorant est indépendant de t, donc on peut passer au sup, puis utiliser l'inégalité de Doob 2.12 afin d'obtenir

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\le T} N_t^{(K)}\right) \le \int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{u\le s} N_u^{(K)}\right) b\mathrm{d}s + \left(1 + 4\underbrace{\sup_K \mathbb{E}\left((M_T^{(K)})^2\right)}_{<+\infty}\right).$$

Par application du lemme de Gronwall, on a enfin

$$\sup_K \mathbb{E}\left(\sup_{t\le T} N_t^{(K)}\right) < +\infty.$$

<u>Étape 2</u> *Montrons que la famille des distributions de $(N_\cdot^{(K)})_K$ est relativement séquentiellement étroitement compacte puis qu'elle converge en loi uniformément.*
Soient η, $\epsilon>0$, σ_K un temps d'arrêt tels que $\sigma_K < \sigma_K + \delta < T$.
On a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|A^{(K)}_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^{(K)}_{\sigma_K\wedge\tau_M}| \ge \eta) &\le \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\left|A^{(K)}_{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} - A^{(K)}_{\sigma_K\wedge\tau_M}\right|\right)\\
&\le \frac{1}{\eta}\mathbb{E}\left(\int_{\sigma_K\wedge\tau_M}^{(\sigma_K+\delta)\wedge\tau_M} \left|b - d_0 - d_1 N_s^{(K)}\right| \mathrm{d}s\right)\\
&\le \frac{\delta}{\eta}(b+d_0+d_1)(1+\sup_K \mathbb{E}(\sup_{t\le 1+\sigma_K} (N_t^{(K)})^2).
\end{aligned}$$

Donc pour δ suffisamment petit, et après avoir utilisé le lemme de Fatou, on a $\mathbb{P}\left(\left|A^{(K)}_{\sigma_K+\delta} - A^{(K)}_{\sigma_K}\right|\right) \le \epsilon$. On trouve de même que pour δ suffisamment petit, $\mathbb{P}\left(\left|M^{(K)}_{\sigma_K+\delta} - M^{(K)}_{\sigma_K}\right|\right) \le \epsilon$.
Enfin de même que dans la partie précédente, on trouve que pour tout $\epsilon>0$, pour tout t, il existe N_0 tel que $\mathbb{P}\left(N_t^{(K)} \le N_0\right) \ge 1-\epsilon$.
Ainsi la famille de distributions est relativement séquentiellement étroitement compacte.

Soit $\overline{N}_\cdot$ une valeur d'adhérence de la famille. Quitte à extraire, on peut supposer que $N_\cdot^{(K)}$ converge en loi vers $\overline{N}_\cdot$ pour la topologie de Skorokhod lorsque K tend vers $+\infty$. De même que dans la partie précédente, $\overline{N}_\cdot$ est p.s continue, donc on a même une convergence en loi uniforme.
De même qu'en section 4.1, on peut montrer que $M_\cdot^{(K)} = N_\cdot^{(K)} - N_0^{(K)} - \int_0^\cdot (b - d_0 - d_1 N_s^{(K)}) N_s^{(K)}\,\mathrm{d}s$ converge $\mathbb{L}^1$ pour la topologie de la convergence uniforme vers $\overline{N}_\cdot^{(K)} - \overline{N}_0^{(K)} - \int_0^\cdot (b - d_0 - d_1 \overline{N}_s^{(K)})\overline{N}_s^{(K)}\,\mathrm{d}s$.
Montrons que la limite de $(M_\cdot^{(K)})$, qu'on notera $M_\cdot$ existe bien, et est une martingale. On pose, pour tous $t > s > s_k \ge \dots \ge s_2 \ge s_1 \ge 0$, et $\psi_1, \dots, \psi_k$ des applications continues bornées,

$$\Psi : y_\cdot \mapsto \left(y_t - y_s - \int_s^t (by_u - d_0 y_u - d_1 y_u^2)\,\mathrm{d}u\right) \cdot \psi_1(y_{s_1}) \cdots \psi_k(y_{s_k}).$$

On admet que Ψ est une application continue de l'ensemble des fonctions cadlag dans $\mathbb{R}$ et que

$$\Psi(N_\cdot^{(K)}) = (M_t^{(K)} - M_s^{(K)}) \cdot \psi_1(N_{s_1}^{(K)}) \cdots \psi_k(N_{s_k}^{(K)}),$$

et

$$|\Psi(N_\cdot^{(K)})| \le C\left(2 + (N_t^{(K)})^2 + (N_s^{(K)})^2 + (t-s)(b+d_0) + (b+d_0+d_1)\int_s^t (N_u^{(K)})^2\,\mathrm{d}u\right).$$

On obtient, grâce au fait que les fonctions cadlag atteignent leur sup sur un segment (propriété assez intuitive qui figure dans [Bil99]), une majoration de $|\Psi(N^{(K)}_{.})|$ par un terme en $C_1 + C_2 N^{(K)}_{t_0}$, pour un $t_0 \in [s,t]$ et des réels C_1, C_2. On a donc aisément $\mathbb{E}\left(\left|\Psi\left(N^{(K)}_{.}\right)\right|^{3/2}\right) < +\infty$, grâce au contrôle du moment d'ordre trois. Ensuite

$$\mathbb{E}\left(\left|\Psi\left(N^{(K)}_{.}\right)\right| \mathbb{1}_{\sqrt{\left|\Psi\left(N^{(K)}_{.}\right)\right| \geq \sqrt{a}}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E}\left(\left|\Psi\left(N^{(K)}_{.}\right)\right|^{3/2}\right) \xrightarrow{a \to +\infty} 0,$$

donc la famille $(|\Psi(N^{(K)}_{.})|)_K$ est uniformément intégrable. Or, des suites du Théorème de représentation de Skorokhod 3.23, quitte à changer de notations on peut supposer que $N^{(K)}_{.}$ converge en probabilité pour la topologie de la convergence uniforme. Alors on a la convergence en probabilité de $(\Psi(N^{(K)}_{.}))$ vers $\Psi(\overline{N}_{.})$. L'uniforme continuité enfin permet d'avoir la convergence $\mathbb{L}^1$, qui donne : $\lim_{K\to+\infty} \underbrace{\mathbb{E}(\Psi(N^{(K)}_{.}))}_{=0} = \mathbb{E}(\Psi(\overline{N}_{.}))$. A fortiori $\mathbb{E}(\Psi(\overline{N}_{.})) = 0$, donc $M_{.}$ est une martingale.

Il reste à identifier la limite de $(M^{(K)}_{.})$ plus précisément via l'étude de la convergence de son crochet précédemment calculé. On rappelle la formule

$$\langle M^{(K)} \rangle_t = \int_0^t 2\sigma N^{(K)}_s \,\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\int_0^t N^{(K)}_s (b + d_0 + d_1 N^{(K)}_s)\,\mathrm{d}s.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, tout $T \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t 2\sigma(N^{(K)}_s - \overline{N}_s)\,\mathrm{d}s\right| \geq \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(2\sigma T \sup_{t\leq T}|N^{(K)}_t - \overline{N}_t| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{K\to+\infty} 0,$$

par convergence presque sûrement uniforme. De plus

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\leq T}\frac{1}{K}\int_0^t N^{(K)}_s (b + d_0 + d_1 N^{(K)}_s)\,\mathrm{d}s \geq \epsilon\right) \leq \frac{T}{K\epsilon}(b + d_0 + d_1)(1 + \sup_K \sup_{t\leq T} \mathbb{E}\left((N^{(K)}_t)^3\right) \xrightarrow{K\to+\infty} 0.$$

Ainsi $\left(\langle M^{(K)}\rangle_{.}\right)_K$ converge en probabilité uniformément sur tout segment $[0,T]$ vers $\int_0^{\cdot} 2\sigma\overline{N}_s\,\mathrm{d}s$.
Le théorème suivant, énoncé dans la revue des mémoires de la S.M.F [Reb79], permet d'en déduire la limite de $M^{(K)}_{.}$:

Théorème 4.1. *Soit $(M^n_{.})_n$ une suite de martingales toutes de carré intégrable, nulle en 0 et A une application de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même croissante et continue, nulle à l'origine. Supposons de plus que pour tout $t \geq 0$,*

$$\langle M^n \rangle_t \xrightarrow[K\to+\infty]{\mathbb{P}} A(t),$$

alors $M^n_{.}$ converge en loi vers un processus de loi gaussienne de covariance $A(s \wedge t)$, pour tous s et t.

On en déduit d'après le Théorème de Lévy 2.25 que pour B un mouvement brownien réel,

$$M^{(K)}_{.} \xrightarrow[\mathbb{P}, \|\cdot\|_{\infty,[0,T]}]{K\to+\infty} \int_0^{\cdot} \sqrt{2\sigma\overline{N}_s}\,\mathrm{d}B_s.$$

Ainsi par unicité de la limite de $(M^{(K)}_{.})$, on a l'EDS suivante $\overline{N}_t = \overline{N}_0 + \int_0^t (b - d_0 - d_1\overline{N}_s)\overline{N}_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\sigma\overline{N}_s}\,\mathrm{d}B_s$, avec pour condition initiale $\overline{N}_0 = N_0$.
Or d'après le Théorème 3.9, cette EDS a une unique solution. Donc la famille étudiée a une unique valeur d'adhérence. Elle converge donc.

Remarque. On peut transformer un peu l'équation pour obtenir une expression un peu plus explicite de notre limite (qu'on note $\overline{N}_{.}$). On a $\mathrm{d}\left(e^{-(b-d_0-d_1\overline{N}_t)t}\overline{N}_t\right) = e^{-(b-d_0-d_1\overline{N}_t)t}\sqrt{2\sigma\overline{N}_t}\mathrm{d}B_s$. *Donc*

$$\overline{N}_t = \overline{N}_0 + e^{(b-d_0-d_1\overline{N}_t)t}\int_0^t e^{-(b-d_0-d_1\overline{N}_s)s}\sqrt{2\sigma\overline{N}_s}\,\mathrm{d}B_s.$$

5 Conclusion et prespectives

Nous avons rappelé quelques notions nécessaires à notre travail en Section 2. Après avoir introduit des outils de probabilités et de topologie sur l'espace des fonctions cadlag en section 3, on a modélisé l'évolution d'une population par une EDS en section 4. Selon les paramètres choisis, lorsqu'on passe à la limite en grande population, on obtient soit un phénomène déterministe régi par une EDO, soit un phénomène aléatoire régi par une EDS comportant un terme de bruit brownien, i.e. une petite perturbation aléatoire.

Trois pistes pourraient être intéressantes à exploiter pour aller plus loin. On pourrait, par passage à la limite en grande population, retrouver une troisième classe de processus : celle des processus de Poisson. Il faudrait intuitivement avoir pour cela un taux de mort nul pouur tout K, et un taux de naissances tendant vers 0 lorsque K tend vers l'infini. Il se trouve qu'un taux de naissances $b_K = b/K$ conviendrait. Il s'agit de le démontrer. On pourrait aussi, comme cela a été fait dans l'article [Mé04], prendre en compte une dépendance spatiale pour plus de réalisme. Enfin, on pourrait faire une étude statistique de données relatives à l'évolution de populations pour estimer les paramètres de notre modèle dans différentes situations pour évaluer la vraisemblance du modèle.

J'aimerais remercier mon maître de stage Chi Tran pour son sujet, son accueil et son encadrement. Grâce à lui j'ai appris énormément en peu de temps sur le plan mathématique, et j'ai pu participer à l'école d'été de la Chaire Modélisation Mathématique et Biodiversité. J'aimerais aussi remercier mon cobureau Kacem, qui m'a beaucoup encouragée et aidée, avec qui le travail était plus agréable, et Gayaneh, qui a été ma camarade de pauses. J'ai beaucoup apprécié enfin les déjeuners avec Elise, Ahmed, Benjamin, Elias, Quentin et Arafat.

Références

[Bil99] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley series in probability and statistics, 1999.

[Bou04] Nicolas Bouleau. *Processus stochastiques et applications.* Hermann, éditeur des sciences et des arts, 2004.

[Ell15] Samuel N. Cohen & Robert J. Elliott. *Stochastic Calculus and its Applications.* Birkäuser, 2015.

[Gal08] Jean-François Le Gall. Mouvement brownien et calcul stochastique, 2008.

[Met15] A. Joffe & M. Metivier. *Weak Convergence of Sequences of Semimartingales with Applications to Multitype Branching Processes.* Applied Probability Trust, 2015.

[Mé04] Nicolas Fournier & Sylvie Méléard. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *The Annals of Applied Probability*, 14(4), 2004.

[Mé09] Sylvie Méléard. Modèles aléatoires en écologie et évolution, programmes d'approfondissement ingénierie mathématique de la finance et des systèmes écologiques éco-sciences, 2009.

[Pri05] Jean Lacroix & Pierre Priouret. Probabilités approfondies, 2005.

[Reb79] Rolando Rebolledo. La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus, 1979.

[Wat89] Nobuyuki Ikeda & Shinzo Watanabe. *Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion.* North-Holland Kodansha, 1989.