

# Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

2013 – 2014

**Théorème 1.** *L'exponentielle réalise une surjection de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* 1. Commençons par montrer que pour toute matrice  $U$  unipotente, il existe  $N$  une matrice nilpotente, qui s'exprime comme un polynôme en  $U$ , telle que  $\exp(N) = U$ .

Soit  $U$  unipotente, la matrice  $U - I_n$  est nilpotente et on pose  $N = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k$  qui est une matrice nilpotente également.

On pose ensuite

$$A(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^{k+1}}{k} (U - I_n)^k\right) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{k+1}}{k+1} (U - I_n)^{k+1}\right)$$

qui est solution du système différentiel

$$\begin{cases} A'(t) = A(t) \cdot (U - I_n) \cdot (I_n + t(U - I_n))^{-1} \\ A(0) = I_n \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a une unique solution définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Or, l'application  $t \mapsto I_n + t(U - I_n)$  est également solution et on en déduit  $\exp(N) = A(1) = U$  avec  $N$  un polynôme en  $U$ .

2. Montrons maintenant la surjectivité de l'exponentielle.

Tout d'abord, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a l'égalité  $\exp(M) \cdot \exp(-M) = \exp(0_n) = I_n$  et par conséquent  $\exp(M) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Réciproquement, soit  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ , la décomposition de Dunford, que nous verrons dans le théorème ??, nous donne  $N$  nilpotente et  $D$  diagonalisable, les matrices  $N$  et  $D$  étant des polynômes en  $M$ , et telles que  $M = D + N$ . En posant  $U = N \cdot D^{-1} + I_n$ , qui est unipotente, on obtient que  $M = U \cdot D$ . De plus, la matrice  $U$  est un polynôme en  $M$ , car  $D^{-1}$  est un polynôme en  $D$ . En effet, si on note  $\pi_D = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$  le polynôme minimal de  $D$ , on a  $a_0 \neq 0$  sinon  $a_1 + a_2X + \dots + a_rX^{r-1}$  annulerait  $D$ , puisque  $M$  et  $D$  sont inversibles. Donc  $D^{-1} = \frac{-1}{a_0} (a_1 + a_2D + \dots + a_rD^{r-1}) \in \mathbb{C}[D] \subset \mathbb{C}[M]$ . D'après ce qui précède, il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\exp(Q(U)) = U$ .

Il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et des  $\lambda_i$  distincts et non nuls tels que  $D = P \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1}$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\alpha_i$  tel que  $\lambda_i = \exp(\alpha_i)$ , et soit  $R \in \mathbb{C}[X]$  le polynôme interpolateur de Lagrange tel que  $\forall i \in \{1, \dots, r\}, R(\lambda_i) = \alpha_i$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \exp(R(D)) &= \exp\left(R\left(P \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1}\right)\right) \\ &= P \cdot \exp\left(R\left(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r)\right)\right) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \text{Diag}(\exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_1), \dots, \exp(\alpha_r), \dots, \exp(\alpha_r)) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) \cdot P^{-1} = D \end{aligned}$$

Finalement, si l'on pose  $A = Q(U) + R(D)$ , comme  $U$  et  $D$  sont des polynômes en  $M$ , les endomorphismes  $Q(U)$  et  $R(D)$  commutent et  $A$  est un polynôme en  $M$  vérifiant

$$\exp(A) = \exp(Q(U)) \cdot \exp(R(D)) = U \cdot D = M$$

□

*Remarque 2.* On sait que  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . En effet, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) > 0$ , donc toute matrice de déterminant strictement négatif n'a pas d'antécédent par l'exponentielle.

On montre que  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$ .

En effet, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\exp(M) = \exp\left(\frac{1}{2}M\right)^2 \in \{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$ .

Réciproquement, soit  $M \in \{M^2, M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$  et  $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = B^2$ .

D'après ce qui précède, il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\exp(Q(B)) = B$  et on a les égalités  $\exp(\bar{Q}(B)) = \exp(\bar{Q}(\bar{B})) = \exp(\overline{Q(B)}) = \overline{\exp(Q(B))} = \bar{B} = B$ .

D'où  $\exp((Q + \bar{Q})(B)) = B^2 = M$  avec  $(Q + \bar{Q}) \in \mathbb{R}[X]$ , et donc  $(Q + \bar{Q})(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

L'exponentielle n'est injective ni sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ni sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En effet, il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P$$

et

$$\exp\left(2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = P^{-1} \cdot \exp\left(2\pi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right) \cdot P = P^{-1} \cdot I_n \cdot P = I_n = \exp(0_n)$$

## Références

- [1] M. Zavidovique. *Un max de maths*. Calvage & Mounet, 2013.