Théorème central limite

Florian BOUGUET

Référence : QUEFFÉLEC, ZUILY : Analyse pour l'agrégation
Leçons : 218, 235, 241, 242, 250, 251

Le théorème central limite (parfois aussi appelé théorème de la limite centrale) est un théorème-clé en théorie des probabilités. Il souligne le rôle *central* des variables gaussiennes, qui peuvent être vues comme le comportement global d'une multitude de petits phénomènes. Par exemple, les chocs de molécules d'eau sur une molécule de pollen ou les effets des conditions atmosphériques sur le plan de vol d'un avion peuvent être modélisés par des variables gaussiennes. En pratique, quand $n \geq 30$, le TCL fournit une bonne approximation de la situation (et on peut estimer son erreur grâce à l'inégalité de BERRY-ESSEEN).

Theorème 1 (*Central Limite*)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et notons $\overline{X_n}$ sa moyenne empirique (i.e. de CÉSARO*).*
Si Var$(X_1) < +\infty$
Alors

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$$

Preuve du théorème :

Si Var$(X_1) = 0$ le théorème est évident, les variables convergeant alors en loi vers une mesure de DIRAC. On peut donc supposer Var$(X_1) \neq 0$.

Quitte à considérer les variables $\frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}}$, on peut supposer que les variables sont i.i.d. centrées réduites (i.e. de moyenne 0 de variance 1). Notons

$$Z_n = \sqrt{n}(\overline{X_n}) = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{où } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Il "suffit" alors de montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour montrer la convergence en loi des variables aléatoires, on va montrer que les fonctions caractéristiques convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction caractéristique de la gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ (pour rappel, il est nécessaire que la fonction caractéristique limite soit continue en 0 ; ici c'est évident).

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}\left[\exp(itZ_n)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{itS_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \qquad \text{car les v.a. sont i.i.d.}
\end{aligned}$$

On peut alors faire un développement de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 2 pour φ_{X_1}. En effet, X_1 est de carré intégrable, et donc sa fonction caractéristique est deux fois dérivable en 0. On a $\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\varphi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}(X_1^2) = -1$.

On a donc le développement limité suivant en 0

$$\varphi_{X_1}(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \qquad \text{quand } u \to 0$$

En remplaçant u par $t/\sqrt{n}$ on obtient pour tout réel t

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(n) \qquad \text{quand } n \to \infty$$

En injectant dans l'égalité obtenue précédemment on obtient

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(n)\right)^n \qquad \text{quand } n \to \infty$$

A ce stade, on pourrait conclure en faisant tendre $n \to \infty$ (grâce à l'utilisation du logarithme, ce qu'on fera de toute façon un peu plus loin) si la quantité entre les parenthèses était à valeurs réelles. Malheureusement, les fonctions caractéristiques sont a priori à valeurs complexes (comme le cache astucieusement le $o(n)$) et il convient de réfléchir un peu. En fait, on a besoin de :

Lemme 1

Soit (z_n) une suite à valeurs complexes.
Si $(z_n) \to z$
Alors

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^z$$

$t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ étant la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$, le théorème de LÉVY nous donne la convergence en loi de (Z_n) vers $\mathcal{N}(0,1)$.

<u>Preuve du lemme :</u>

Le plus dur reste à faire ! Soit $\omega \in \mathbb{C}$. La formule du binôme de NEWTON nous donne

$$e^{\omega} - \left(1 + \frac{\omega}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \omega^k \qquad \text{avec } a_k^{(n)} \begin{aligned}[t] &= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\right) \text{ si } k \leq n \\ &= \frac{1}{k!} \text{ sinon}\end{aligned}$$

Donc $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $a_k^{(n)} \in \mathbb{R}_+$. Donc

$$\begin{aligned}
\left|e^{\omega} - \left(1 + \frac{\omega}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} r^k \qquad \text{et } r = |\omega| \in \mathbb{R} \\
&\leq \mathrm{e}^r - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \mathrm{e}^r - \exp\left(n \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)\right) \\
&\leq \mathrm{e}^r - \exp\left(r - \frac{r^2}{2n}\right) \\
&\leq \mathrm{e}^r\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2n}\right)\right) \\
&\leq \frac{r^2}{2n}\mathrm{e}^r
\end{aligned}$$

C'est presque fini ! On a donc

$$\begin{aligned}\left|e^z - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leq |e^z - e^{z_n}| + \left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - e^{z_n}\right| \\ &\leq |e^z - e^{z_n}| + \frac{|z_n|^2}{2n}\mathrm{e}^{|z_n|}\end{aligned}$$

(z_n) converge donc est bornée, la quantité de droite tend donc vers 0 en passant à la limite (par continuité de l'exponentielle), ce qui conclut la preuve du lemme.

□

REMARQUE

Il arrive (votre serviteur en aura fait les frais) que certains jurys trouvent la preuve du lemme complètement triviale en utilisant le logarithme complexe. Mouais.... Quoi qu'il en soit, je vous propose en variante de dire "la preuve du lemme est évidente/facile/triviale/ridiculement courte" - à condition de savoir comment la démontrer - et de rajouter en prologue le calcul de la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$:

Proposition 1

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
Alors X a pour fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$

Preuve de la proposition 1 :
Par définition, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx \qquad \text{par le lemme de transfert}$$

Nous allons ici donner une méthode requérant le théorème d'holomorphie sous le signe intégral. On pourrait aussi utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral et vérifier que φ_X vérifie une équation différentielle du premier ordre (voir BARBE, LEDOUX).

Notons $f(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{zx}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ et $\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x,z)dx$.
- à x fixé, $f(x,\cdot)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- à z fixé , $f(\cdot,z)$ est mesurable.
- $\forall x, z$, $|f(x,z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{|z|x}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ donc sur tout compact, f est majorée par une fonction intégrable indépendante de z.

Φ est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et, si $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{zx}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-z)^2}dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad \text{et on reconnait l'intégrale d'une gaussienne} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\end{aligned}$$

$z \mapsto \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide avec Φ sur l'axe réel, donc sur $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier

$$\Phi(it) = \varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

□