Table de caractères de $\mathfrak{A}_5$

Florian BOUGUET

Référence : RAMIS, WARUSFEL (en grande partie)

Theorème 1

La table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ est :

	$\boxed{1}$ (1)	$\boxed{20}$ (123)	$\boxed{15}$ (12)(34)	$\boxed{12}$ (12345)	$\boxed{12}$ (21345)
χ_{tr}	1	1	1	1	1
χ_{std}	4	1	0	-1	-1
χ_3	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3'	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_5	5	-1	1	0	0

Preuve :

► Classes de conjugaison :
On peut montrer sans problèmes que les 3-cycles d'un côté et les doubles-permutations de l'autre sont conjugués. Qu'en-est-il des 5-cycles ? Je vous conseille de faire des petits diagrammes pour illustrer la suite de vos propos. On dénombre 24 5-cycles dans $\mathfrak{A}_5$, mais on va montrer qu'ils ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Tout 5-cycle σ est conjugué aux autres 5-cycles via un élément de $\mathfrak{S}_5$, et donc on peut décomposer les 5-cycles en (au plus) deux "groupes" : ceux qui sont conjugués à σ via $\mathfrak{A}_5$, et les autres. Or, les autres sont évidemment conjugués entre eux via $\mathfrak{A}_5$ (on peut le voir en repassant par σ par exemple). On a donc au plus 2 classes de conjugaison pour les 5-cycles. Enfin, (12345) et (21345) ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$ car ils sont conjugués via (12) et (12) adjoint à des 5-cycles - par jeu d'écriture. Ils ne peuvent donc pas être conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.

► χ_{tr} et χ_{std} :
Regardons la représentation naturelle de $\mathfrak{A}_5$ sur $\mathbb{R}^5$ obtenue par permutation des vecteurs de base. Le caractère associé $\chi_{\mathbb{R}^5}$ est la trace d'une matrice de permutation, c'est-à-dire le nombre de 1 sur la diagonale. Autrement dit $\chi_{\mathbb{R}^5}(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. Cette représentation laisse $Vect\{(1,1,1,1,1)\}$ stable, il s'agit donc d'une représentation de dimension 1 (la représentation triviale correspondant à χ_{tr}, on peut donc compléter la première ligne). On a alors un caractère de dimension 4, noté χ, tel que

$$\chi = \chi_{\mathbb{R}^5} - \chi_{tr}$$

On en déduit que

$$\chi = [4, 1, 0, -1, -1]$$

Le calcul nous donne

$$< \chi, \chi >= \frac{1}{60}\left(1 \times 4^2 + 20 \times 1^2 + 15 \times 0^2 + 12 \times (-1)^2 + 12 \times (-1)^2\right) = 1$$

χ est donc irréductible, on peut donc le noter χ_{std} (pour "standard") et compléter la deuxième ligne.

► χ_5 :
Finissons déjà de remplir la première colonne en remarquant que

$$1 + 4^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 60 \Rightarrow a = b = 3, c = 5$$

Cherchons la représentation de dimension 5. Pour cela, on regarde l'action naturelle de $\mathfrak{A}_5$ sur les dix paires d'éléments distincts de $[\![1, 5]\!]$, telle que

$$\sigma \cdot \{a, b\} = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$$

Cela nous livre une représentation $\mathbb{R}^{10}$ de degré 10 obtenue comme précédemment, par permutation des vecteurs de base. En remarquant que (123) ne laisse qu'une seule paire invariante (la paire {4,5}) et que (12)(34) ne laisse que {1,2} et {3,4} invariants, on a :

$$\chi_{\mathbb{R}^{10}} = [10, 1, 2, 0, 0]$$

Le calcul nous donne $< \chi_{\mathbb{R}^{10}}, \chi_{tr} >=< \chi_{\mathbb{R}^{10}}, \chi_{std} >= 1$, donc les représentations standard et triviale apparaissent une fois et une seule dans $\mathbb{R}^{10}$:

$$\mathbb{R}^{10} = X \oplus Y \oplus Z$$

X est associée à χ_{tr} et Y est associée à χ_{std}. Pour construire Z, il nous reste des représentations de dimensions 3 ou 5 donc Z est irréductible de dimension 5. On en déduit que

$$\chi_5 = \chi_{\mathbb{R}^{10}} - \chi_{tr} - \chi_{std} = [5, -1, 1, 0, 0]$$

On peut donc compléter la dernière ligne.
► <u>χ_3 et χ_3' :</u>
Il nous reste à remplir deux lignes. Notons

$$\chi_3 = [3, a, b, c, d], \chi_3' = [3, a', b', c', d']$$

Par orthogonalité des caractères on a

$$\begin{aligned} < \chi_3, \chi_{tr} > &= 3 + 20a + 15b + 12c + 12d = 0 \\ < \chi_3, \chi_{std} > &= 12 + 20a - 12c - 12d = 0 \\ < \chi_3, \chi_{tr} > &= 15 - 20a + 15b = 0 \end{aligned}$$

En additionnant les deux premières lignes :

$$15 + 40a + 15b = 0$$

En soustrayant la troisième ligne :

$$a = 0$$

D'où

$$b = -1$$

Il ne nous reste plus que quatre cases à remplir ! On a également

$$d = 1 - c$$

De plus $< \chi_3, \chi_3 >= 1$ donc $c^2 + (1 - c)^2 = 3$ donc $2c^2 - 2c - 2 = 0$. Les racines de $X^2 - X - 1$ sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. De plus χ_3' vérifie les mêmes relations, mais $c \neq c'$ et $d \neq d'$. On peut donc conclure.

□