Théorèmes Taubériens

Yvain Bruned

référence : Probabilité II, Feller p.429

1 Principe

Soit μ une mesure concentrée sur $[0, \infty]$ et soit ϕ sa transformée de Laplace

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} d\mu(x)$$

définie pour $\lambda > 0$. Par abus de notation, on note $\mu(\{u : u \leq x\}$ par $\mu(x)$. On présente des conditions générales pour que le comportement de ϕ au voisinage de l'origine soit déterminé par celui de $\mu(x)$ lorsque $x \to \infty$. Un tel théorème est appelé théorème taubérien.

Théorème 1.1 (Continuité) *Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de transformée de Laplace ϕ_n telle que $\phi_n(a) < \infty$. Si $\phi_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ pour $\lambda > a$, alors ϕ est la transformée de Laplace d'une mesure μ et $\mu_n \to \mu$. Réciproquement, si $\mu_n \to \mu$ et la suite $\phi_n(a)$ est bornée, alors $\phi_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ pour $\lambda > a$.*

Preuve Le fait que μ_n ait une transformée de Laplace implique que $\mu_n(I) < \infty$ pour tout intervalle fini I. On a donc : $\mu_n \to \mu$ si et seulement si $\mu_n(I) \to \mu(I) < \infty$ pour tout intervalle fini de continuité de μ.

On suppose que $\mu_n \to \mu$ et que $\phi_n(a) < A$. Si $t > 0$ est un point de continuité de μ alors

$$\int_0^t e^{-(\lambda+a)x} d\mu_n(x) \to \int_0^t e^{-(\lambda+a)x} d\mu(x)$$

et le membre de droit diffère de $\phi_n(\lambda + a)$ par

$$\int_t^\infty e^{-(\lambda+a)x} d\mu_n(x) < Ae^{-\lambda t}$$

qui tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. On en déduit que la limite inférieure et supérieure de $\phi_n(\lambda + a)$ sont les mêmes et donc $\phi_n(\lambda + a)$,pour $\lambda > 0$, converge vers une limite finie.

On suppose que $\phi_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ pour $\lambda > a$. Soit $\lambda_0 > a$ fixé, la fonction $\phi_n(. + \lambda_0)/\phi_n(\lambda_0)$ est la transformée de Laplace de la mesure de probabilité $\nu_n(dx) = (1/\phi_n(\lambda_0))e^{-\lambda_0 x}\mu_n(dx)$. En appliquant le théorème de continuité pour une mesure de probabilité, on obtient la convergence de ν_n et donc de μ_n. Pour une mesure de probabilité le premier sens découle de la définition de la convergence étroite et ne demande pas que $\phi_n(a)$ soit bornée. Pour la convergence de mesure, on utilise le théorème de Helly appliqué à la fonction de répartition de ν_n. On extrait une sous-suite convergente vers une limite F dont la transformée de Laplace est la limite des transformées de Laplace d'après le premier sens. Puis on conclut par injectivité de la transformée de Laplace qui donne l'existence d'une seule valeur d'adhérence. $\square$

Pour simplifier l'écriture des théorèmes, on introduit deux variables t et τ telles que $t\tau = 1$. On a donc $\tau \to 0$ quand $t \to \infty$. Les principaux ingrédients des théorèmes de la deuxième partie sont les suivants :

- le théorème de continuité pour la transformée de Laplace.
- la transformée de Laplace de la mesure $\mu(x) = x^\rho/\Gamma(\rho+1)$ avec $\rho \geq 0$ est $\phi(\lambda) = \lambda^{-\rho}$ pour $\lambda > 0$.
- la fonction $\phi(\tau.)$ est la transformée de Laplace de $\mu(t.)$.

2 Théorèmes Taubériens

Théorème 2.1 *Soit μ une mesure de transformée de Laplace ϕ définie pour $\lambda > 0$. Alors chacune des relations suivantes*

$$\frac{\phi(\tau\lambda)}{\phi(\tau)} \to_{\tau\to 0} \frac{1}{\lambda^\rho} \tag{1}$$

et

$$\frac{\mu(tx)}{\mu(t)} \to_{t\to\infty} x^\rho \tag{2}$$

implique l'autre ainsi que

$$\phi(\tau) \sim \mu(t)\Gamma(\rho+1). \tag{3}$$

Preuve On suppose (1). La fonction $\phi(\tau.)/\phi(\tau)$ est la transformée de Laplace de $\mu(t.)/\phi(\tau)$ et d'après le théorème de continuité nous avons donc :

$$\frac{\mu(tx)}{\phi(\tau)} \to \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}. \tag{4}$$

car la transformée de Laplace de $\frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}$ est $\frac{1}{\lambda^\rho}$. Pour $x = 1$, nous obtenons (3), et en substituant (3) dans (4), on obtient (2). Réciproquement, on suppose (2). En prenant la transformée de Laplace et en appliquant le théorème de continuité, on obtient :

$$\frac{\phi(\tau\lambda)}{\mu(t)} \to \frac{\Gamma(\rho+1)}{\lambda^\rho} \tag{5}$$

On conclut en remarquant que (5) implique (1) et (3) Pour appliquer le théorème de continuité, on doit montrer que le menbre droit est borné pour un λ. Il suffit donc de vérifier que $\phi(\tau)/\mu(t)$ est borné. En partitionnant le domaine d'intégration en les points $t, 2t, 4t, ...$, on obtient :

$$\phi(\tau) \leq \mu(t) + \sum_1^\infty e^{-2^{n-1}} \mu(2^n t)$$

D'après (2), il existe t_0 tel que $\mu(2t) \leq 2^{\rho+1}\mu(t)$ pour $t > t_0$. En itérant cette inégalité, on a :

$$\frac{\phi(\tau)}{\mu(t)} \leq 1 + \sum_1^\infty 2^{n(\rho+1)} e^{-2^{n-1}}$$

qui est bien borné lorsque $t \to \infty$. □

Une fonction positive L définie sur $]0, \infty[$ varie lentement à l'infini si pour tout x,

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to_{t\to\infty} 1.$$

On peut alors réécrire le théorème 2.1 sous la forme :

Théorème 2.2 *Si L varie lentement à l'infini et $0 \leq \rho < \infty$, alors*

$$\phi(\tau) \sim_{\tau\to 0} \tau^{-\rho} L(\frac{1}{\tau}) \tag{6}$$

et

$$\mu(t) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} t^\rho L(t) \tag{7}$$

sont équivalentes.

Lemme 2.3 *On suppose que μ admet une densité u monotone. Si (7) a lieu avec $\rho > 0$ alors*

$$u(x) \sim_{x\to\infty} \rho\mu(x)/x. \tag{8}$$

Preuve Pour $0 < a < b$

$$\frac{\mu(tb)\mu(ta)}{\mu(t)} = \int_a^b \frac{u(ty)t}{\mu(t)} dy.$$

Lorsque $t \to \infty$, le membre gauche tend vers $a^\rho - b^\rho$. L'intégrande est monotone et par (7) elle est bornée quand $t \to \infty$. Il existe alors une suite (t_n) de points de continuité de μ convergeant vers ∞ telle que

$$\frac{u(t_n y)t_n}{\mu(t_n)} \to \psi(y)$$

L'intégrale de ψ sur$]a, b[$ est égale à $a^\rho - b^\rho$, et donc $\psi(y) = \rho y^{\rho-1}$. La limite est indépendante de la suite choisie. On peut donc passer à la limite pour n'importe quel $t \to \infty$ et pour $y = 1$ on obtient le résultat voulu. □

Théorème 2.4 *Soit $0 < \rho < \infty$. Si μ admet une densité u monotone alors quand $\lambda \to 0$ et $x \to \infty$, on a :*

$$\phi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^\rho} L(\frac{1}{\lambda}) \text{ ssi } \quad u(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} x^{\rho-1} L(x). \tag{9}$$

.

Preuve C'est une conséquence du théorème 2.2 et du lemme 2.3. □

Théorème 2.5 (théorème taubérien)

Soient $(q_n)_n$ une suite à valeurs positives, on suppose que

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n \tag{10}$$

converge pour $0 \leq s < 1$. Si L varie lentement à l'infini (pour tout x, $\frac{L(tx)}{L(t)} \to_{t\to\infty} 1$) et $0 \leq \rho < \infty$ alors chacune des relations

$$Q(s) \sim_{s\to 1^-} \frac{1}{(1-s)^\rho} L(\frac{1}{1-s}) \tag{11}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_k \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^\rho L(n) \tag{12}$$

implique l'autre. De plus, si la suite (q_n) est monotone et $0 < \rho < \infty$ alors (11) est équivalent à

$$q_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n). \tag{13}$$

Preuve Soit μ la mesure ayant pour densité u par rapport à la mesure de lebesgue définie par

$$u(x) = q_n, \text{ pour } n \leq x \leq n+1$$

La transformée de Laplace ϕ de μ est donnée par :

$$\phi(\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} q_n e^{-n\lambda} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} Q(e^{-\lambda})$$

Les relations (11) et (12) sont équivalentes à (6) et (7). D'après le théorème 2.2, elles sont donc équivalentes. La relation (13) est une conséquence immédiate du théorème 2.4. □