Théorème taubérien fort de Hardy Littlewood.

Référence : Gourdon, Analyse.

Théorème 1. (Hardy Littlewood)

Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ en $+\infty$, telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence ≥ 1, et sa somme $F(x)$ vérifie $\lim_{x\to 1_-} F(x) = s$. Alors la série $\sum a_n$ converge et vaut s.

Démonstration. On peut toujours supposer que $s = 0$ quitte à considérer $a_0 - s$ comme premier terme de la suite.

On introduit l'espace Θ défini par :

$$\Theta = \left\{ \theta : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ telle que } \sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge pour } x \in [0,1[, \text{ et } \lim_{x\to 1_-} \sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) = 0 \right\}.$$

Étape 1 : Démarche.

On introduit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$, et $g(x) = 1$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Remarquons que l'on a $x^n < \frac{1}{2}$ dès que $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$ (qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1_-). Si l'on appelle $N_x := \left\lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \right\rfloor$, alors pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n$. Ainsi, si nous montrons que $g \in \Theta$, le théorème sera démontré.

Étape 2 : $X\mathbb{R}[X] \subset \Theta$.

Pour montrer ce résultat, il suffit de vérifier que chaque monôme X^k $(k \geq 1)$ est dans Θ, puis la linéarité permet de conclure pour n'importe quel polynôme nul en zéro.

On a $\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn}$ qui converge car si $x < 1$, $x^k < x < 1$. De plus, $\sum_{n\geq 0} a_n x^{kn} = F(x^k)$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 1_- (composition de limites).

Étape 3 : Un lemme.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$(1-x) \sum_{n\geq 0} x^n P(x^n) \xrightarrow[x\to 1_-]{} \int_0^1 P(t)dt.$$

Là encore, il suffit de montrer ce résultat pour les monômes X^k, $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n\geq 0} x^n x^{kn} &= (1-x) \sum_{n\geq 0} (x^{k+1})^n \\ &= (1-x) \frac{1}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1+x+\ldots+x^k}, \end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, lorsque x tend vers 1. Par linéarité, c'est donc vrai pour tout polynôme.

Étape 4 : Approximation par des polynômes.

Afin d'approcher g par des polynômes (faisant intervenir du x et du $1-x$), on décide d'écrire g sous la forme $g(x) = x + x(1-x)h(x)$, ce qui revient à considérer la fonction $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)}$. Ainsi, $h(x) = \frac{1}{x-1}$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. On approche h par deux fonctions continues s_1 et s_2 telles que $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\displaystyle\int_0^1 s_2 - s_1 < \varepsilon$. Puis d'après le théorème de Weierstrass, il existe deux polynômes T_1 et T_2 tels que $|T_i - s_i| < \varepsilon$ (i=1,2). Posons alors $U_1 = T_1 - \varepsilon$ et $U_2 = T_2 + \varepsilon$.

Ainsi nous avons $U_1 \leq h \leq U_2$, avec $\displaystyle\int_0^1 U_2 - U_1 < C\varepsilon$ ($C = 5$ mais peu importe la valeur, c'est indépendant de ε...).

Revenons à l'étude de g. Compte tenu de ce qui vient d'être fait, on pose :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x + x(1-x)U_1(x), \\ P_2(x) &= x + x(1-x)U_2(x), \\ Q(x) &= \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{gathered} P_1(0) = P_2(0) = 0, \\ P_1 \leq g \leq P_2, \\ \int_0^1 Q < C\varepsilon. \end{gathered}$$

Étape 5 : Conclusion.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ telle que $a_n \leq \frac{M}{n}$ pour tout n. Soit $x \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n \geq 0} a_n P_1(x^n) \right| &\leq \sum_{n \geq 0} |a_n| (P_2 - P_1)(x^n) \\ &\leq M \sum_{n \geq 0} \frac{x^n(1-x^n)}{n} Q(x^n). \end{aligned}$$

Or, $1 - x^n = (1-x)(1 + x + ... + x^{n-1}) \leq n(1-x)$, d'où :

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n \geq 0} a_n P_1(x^n) \right| \leq M(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n Q(x^n),$$

donc,

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n \geq 0} a_n P_1(x^n) \right| + M(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n Q(x^n).$$

D'après le lemme, le deuxième terme de cette somme tend vers $M \displaystyle\int_0^1 Q(t)dt \leq CM\varepsilon$ lorsque x tend vers 1_-, donc il existe $\eta_1 > 0$ assez petit tel que $\forall x \in [1 - \eta_1, 1[$, on ait :

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n \geq 0} a_n P_1(x^n) \right| + 2MC\varepsilon.$$

Enfin, comme $P_1 \in \Theta$, (c.f. étape 2), le premier terme de la somme tend vers 0 lorsque x tend vers 1_-, donc il existe $\eta_2 > 0$ assez petit tel que :

$$\forall x \in [1-\eta_2, 1[, \left| \sum_{n\geq 0} a_n P_1(x^n) \right| < \varepsilon.$$

Finalement, il existe $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\eta, 1[$:

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq (1 + 2MC)\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration puisque g est donc bien dans Θ. $\square$