218 - Applications des formules de Taylor

Simon Boulier   Maxime Pouvreau

29 avril 2013

E et F sont des evn de dimension finie, U est un ouvert de E et $[a, b]$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1 Théorie

1.1 Préliminaires

Théorème fondamental de l'analyse Si $f \in \mathcal{C}(U, F)$ et si $[a, a+h] \subseteq U$ alors

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 Df(a+th).h \text{ d}t$$

Théorème des accroissements finis Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$ et $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ différentiables sur $]a, b[$. Si $\|f'\| \leq \|g'\|$ sur $]a, b[$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

1.2 Formules de Taylor

Notation On considère $f : U \to F$ et $a \in U$, et on note :

$$R_n^a(h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a).(h, h, \ldots, h)$$

dès que cela a un sens.

Remarque $f \in \mathcal{C}^\infty(U, F)$ est polynomiale ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_n = 0$.

Taylor-Young Si f est n fois différentiable en a, alors

$$R_n^a(h) = o(\|h\|^n)$$

Taylor-Lagrange Si f est $n+1$ fois différentiable sur U et $[a, a+h] \subseteq U$, alors

$$\|R_n^a(h)\| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,a+h]} \|D^{n+1} f\|$$

Taylor-Reste intégral Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur U et $[a, a+h] \subseteq U$, alors

$$R_n^a(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th).(h, h, \ldots, h) \text{ d}t$$

1.3 Cas réel

Taylor-Lagrange (égalité) Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ et est $n+1$ dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$R_n^a(b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2 Applications en analyse

2.1 Résultats issus des formules de Taylor

Inégalité de Kolmogorov Soient $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $n \geq 2$ et $M_k = \sup_{\mathbb{R}} |f^{(k)}|$. Si M_0 et M_n sont finis alors

- $\forall k \leq n$, M_k est fini
- $M_1 \leq \sqrt{M_0 M_2}$
- $\forall k \leq n$, $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$

Lemme de Bernstein Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$ sur I, alors la série de Taylor de f converge uniformément sur tout compact de l'intérieur I vers f.

Propriété Tout zéro d'ordre fini [1] d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b],F)$ est isolé.

Théorème de Darboux La dérivée d'une fonction dérivable réelle possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Propriété Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme ayant au moins une racine réelle α et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|f^{(n)}| \leq |P|$ alors f est nulle.
Contre-exemple : $\sin x$ et x^2+1.

2.2 Développements limités

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un DL en 0 à l'ordre n si f s'écrit $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n + o(x^n)$. Si c'est le cas le DL est alors unique.

La formule de Taylor-Young implique l'existence d'un DL à l'ordre n pour une fonction n fois dérivable.

Exemples de DL usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Propriété Si f admet un DL en 0 à l'ordre $n \geq 1$ alors f est dérivable en 0.
Attention ! Ce n'est pas vrai à l'ordre supérieur. Par exemple pour $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$, $f(0) = 1$ on a $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.3 Formule d'Euler-MacLaurin

Les polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les nombres de Bernoulli $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad b_n = B_n(0)$$

1. ie. tel qu'il existe une dérivée de f qui ne s'y annule pas

Formule Soient $m < n \in \mathbb{Z}$, $r \leq 1$ et $f \in \mathcal{C}^r([m,n],\mathbb{C})$. On a alors

$$\frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) = \int_m^n f(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{i=2}^{r} \frac{b_i}{i!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_r$$

avec $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n B_r(\{t\}) f^{(r)}(t)\ \mathrm{d}t$.

Applications
- Développement asymptotique de H_n
- Formule de Stirling précisée
- Prolongement de ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

3 Applications en analyse numérique

Proposition Si $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$.

3.1 Méthode de Newton

On cherche à approcher le zéro d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supposons que f soit $\mathcal{C}^2$, que $f(a) < 0 < f(b)$ et que $f' > 0$ sur $[a,b]$. Alors pour x_0 suffisamment proche du zéro de f, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers le zéro avec une vitesse quadratique.

Exemple : Méthode de Héron Si on considère $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ ($f(x) = x^2 - 2$), on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$. Et plus précisément on a :

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq |x_n - \sqrt{2}|^2$$

d'où $x_{10} \simeq \sqrt{2}$ à 10^{-308} près !

3.2 Approximations d'intégrales

On dit qu'une méthode de calcul approché est d'ordre n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur à n.

Méthodes composés On cherche une valeur approchée de l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pour cela on subdivise $[a,b]$: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, puis on approche l'intégrale de f sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$ par l'intégrale de P_i un polynôme interpolant f sur ce segment. On note alors $S_n(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i$ et $e_n(f) = |S_n(f) - \int_a^b f|$. On note aussi $h = \max(a_{i+1} - a_i)$ le pas.

Méthode	P_i	$S_n(f)$	Ordre	Majorant de $e_n(f)$
Rectangles à gauche	$f(a_i)$	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i)$	0	$\frac{h(b-a)}{2}M_1$ si f $\mathcal{C}^1$
Point milieu	$f(\frac{a_{i+1}+a_i}{2})$	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\frac{a_{i+1}+a_i}{2})$	1	$\frac{h^2(b-a)}{24}M_2$ si f $\mathcal{C}^2$
Trapèzes	polynôme d'interpolation de Lagrange en a_i et a_{i+1}	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{f(a_{i+1})+f(a_i)}{2}$	1	$\frac{h^2(b-a)}{12}M_2$ si f $\mathcal{C}^2$
Simpson	polynôme d'interpolation de Lagrange en a_i, $\frac{a_{i+1}+a_i}{2}$ et a_{i+1}	$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{f(a_{i+1})+4f(\frac{a_{i+1}+a_i}{2})+f(a_i)}{6}$	3	$\frac{h^4(b-a)}{2880}M_4$ si f $\mathcal{C}^4$

Méthode de Gauss On cherche cette fois à approximer l'intégrale de f contre une fonction poids $w : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ par $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i f(x_i)$.

Théorème Il existe un et un seul choix des x_i et des λ_i tel que la méthode soit d'ordre $2l + 1$. Les x_i sont les racines du $(l + 1)$-ème polynôme orthogonal associé à w.

4 Applications en géométrie

4.1 Quadriques et extrema

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Proposition Si f admet un minimum local en a et si f est différentaible en a, alors $Df(a) = 0$.

Proposition Si f est deux fois différentiables et si $Df(a) = 0$ alors :
- a minimum local $\Rightarrow D^2f(a)$ positive
- $D^2f(a)$ définie positive $\Rightarrow a$ minimum local

Exemple $f(x, y) = x^2 - y^3$ n'a pas de minimum local en zéro mais $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ positive. $g(x, y) = x^2 + y^4$ a un minimum local en zéro donc $Dg(0) = 0$ mais $D^2g(0)$ non définie positive.

Remarque Ce résultat se généralise à l'ordre supérieur.

Quadriques Soit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a (un point critique) de Hessienne $\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ s & t \end{smallmatrix}\right)$ en ce point. Alors :
- si $rt - s^2 > 0$ f admet un extremum local en a (un min si $r > 0$, un max si $r < 0$).
- si $rt - s^2 < 0$ f n'admet pas d'extremum local en a.
- si $rt - s^2 = 0$ on ne peut pas conclure.

4.2 Courbes et surfaces

Courbe parametrée Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe parametrée de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la première dérivée non nulle, $f^{(r)}(t_0)$, et la première dérivée non colinéaire à cele-ci, $f^{(s)}(t_0)$, donnent l'aspect local de la courbe en t_0.
- si r est impair et s pair, la courbe ne coupe pas sa tangente en t_0
- si r est impair et s impair, t_0 est un point d'inflexion
- si r est pair et s impair, t_0 est un point de rebroussement de première espèce
- si r est pair et s pair, t_0 est un point de rebroussement de seconde espèce

Nappe parametrée Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une courbe parametrée de classe $\mathcal{C}^2$. Alors $f(x, y) = a + bx + cy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2)$ en 0. Le plan tangent en 0 est $a + bx + cy = 0$ et la position relative est donnée par l'étude de la forme quadratique $Q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$.
- si Q est définie positive, 0 est un point elliptique.
- si Q est non dégénérée mais non définie, 0 est un point hyperbolique.
- si Q est dégénérée mais non nulle, 0 est un point parabolique.

Lemme de Morse Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$. Si $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n - p)$, alors il existe un difféormorphisme $\phi : x \mapsto u$ entre deux voisinages de 0 tel que $\phi(0) = 0$ et :

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

Références

- Beck, V., Malick, J., Peyré, G. (2005). Objectif agrégation : mathématiques. H & K.
- Cartan, H. (1977). Cours de calcul différentiel. Hermann.
- Demailly, J. P. (2012). Analyse numérique et équations différentielles (Nouvelle édition). EDP sciences.
- Francinou, G. Nicolas, Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse, 1.
- Gostiaux, B. (1993). Cours de mathématiques Spéciales, tome 3 : Analyse fonctionnel et calcul différentiel.
- Gourdon, X. (2000). Les maths en tête : analyse : mathématiques pour M'. Ellipses.
- Pommellet, A. (1994). Cours d'analyse.
- Queffélec, H., Zuily, C. (2002). Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques. Dunod.
- Rouvière, F. (1999). Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation. Cassini.