# Théorème de Lowenheim-Skolem

Mathias Millet

2 décembre 2014

On se place sur un langage $\mathcal{L}$.

**Définition** Soit $\mathcal{M}$ un modèle, un sous-modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est un modèle tel que
- $|\mathcal{N}| \subset |\mathcal{M}|$
- pour tout symbole de fonction $f$, $f_{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{M}}$
- pour tout symbole de relation $R$, $R_{\mathcal{N}} = R_{\mathcal{M}} \cap |\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|$

**Définition** Soient $\mathcal{M}$ un modèle, $\mathcal{N}$ un sous-modèle. $\mathcal{N}$ est un sous-modèle élémentaire si pour toute formule $F[x_1, ..., x_n]$, pour tous $a_1, ..., a_n \in |\mathcal{N}|$, on a

$$\mathcal{M} \models F[a_1, ..., a_n] \text{ ssi } \mathcal{N} \models F[a_1, ..., a_n]$$

**Définition** Pour $A \subset |\mathcal{M}|$, on note $E(A)$ un plus petit ensemble satisfaisant : pour $F[x]$ une formule à paramètres dans $A$, si $\mathcal{M} \models \exists x F[x]$, alors E(A) contient un élément de $\{y_F, \mathcal{M} \models F[y_F]\}$ (qui est non vide par définition).

**Théorème de Lowenheim-Skolem descendant (affaibli)** Soit $\mathcal{M}$ un modèle, si $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable, alors $\mathcal{M}$ admet un sous-modèle élémentaire au plus dénombrable.

**Preuve**

1. On définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = \emptyset$, $X_{n+1} = X_n \cup E(X_n)$. Soit alors $\mathcal{N}$ le sous-modèle de $\mathcal{M}$ tel que $|\mathcal{N}| = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Notons que $|\mathcal{N}|$ est alors stable par l'opérateur $E$ : $E(|\mathcal{N}|) = |\mathcal{N}|$

   (a) Montrons tout d'abord que ce nouveau modèle est correctement défini, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $(a_1, ..., a_n) \in N^n$, $f \in \mathcal{F}_n$, on a bien :

   $f(a_1, ..., a_n) \in |\mathcal{N}|$.

   C'est en fait immédiat, puisque, $f$ étant partout définie, on a $\mathcal{M} \models \exists x f(a_1, ..., a_n) = x$. La suite $(X_n)_n$ étant croissante, il existe $p$ tel que $a_1, ..., a_n \in X_p$. Par définition de $(X_n)_n$, l'élément $y = f(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{M}$ appartient alors à $X_{p+1}$, et donc à $|\mathcal{N}|$.

   Notons en particulier que les constantes sont dans $X_1$.

(b) $\mathcal{N}$ est au plus dénombrable. En effet, $\mathcal{L}$ étant au plus dénombrable, les variables, fonctions et relations sont aussi en quantité au plus dénombrable. L'ensemble des formules étant aussi dénombrable, chaque $X_n$ est au plus dénombrable ; leur réunion l'est aussi.

2. Montrons maintenant que $\mathcal{N}$ est un sous-modèle élémentaire de $\mathcal{M}$, c'est à dire que, pour $a_1, ...a_n \in |\mathcal{N}|$ on a bien : pour toute formule $F[x_1, ..., x_n]$,
$\mathcal{M} \models F[a_1, ..., a_n]$ ssi $\mathcal{N} \models F[a_1, ..., a_n]$
Tout d'abord, on a : pour tout terme $t[x_1, ..., x_n]$, $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(t[a_1, ..., a_n]) = \mathrm{Val}_{\mathcal{N}}(t[a_1, ..., a_n])$ (immédiat par induction sur les termes, $\mathcal{N}$ étant un sous-modèle de $\mathcal{M}$).
Effectuons maintenant une induction sur les formules [1].
Soit $F[x_1, .., x_n]$ une formule.
   (a) Cas de base : si $F[a_1, ..., a_n] = R(t_1[a_1, ..., a_n], ..., t_s[a_1, ..., a_[n])$ : immédiat, $\mathcal{N}$ étant un sous-modèle de $\mathcal{M}$
   (b) Cas des connecteurs propositionnels : immédiat par hypothèse d'induction.
   (c) Cas où $F[a_1, ..., a_n] = \forall y G[a_1, ..., a_n, y]$ : on se ramène à $F = \neg\exists y \neg G$
   (d) Cas où $F[a_1, ..., a_n] = \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$ :
      $\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{M} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$, alors, la suite $(X_n)_n$) étant croissante, il existe $p$ tel que, pour tout $i$, $a_i \in X_p$. Par construction des $(X_n)_n$, il existe donc $a_{n+1} \in X_{p+1} \subset |\mathcal{N}|$ tel que $\mathcal{M} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$. De plus, l'hypothèse d'induction nous donne : $\mathcal{N} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$. Enfin, par définition de la validité des formules, on obtient : $\mathcal{N} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$
      $\Leftarrow$ Supposons $\mathcal{N} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$, alors il existe $a_{n+1} \in |\mathcal{N}|$ tel que $\mathcal{N} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$ ; par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \models G[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$, et enfin $\mathcal{M} \models \exists y G[a_1, ..., a_n, y]$

   Si l'on voulait faire des preuves correctes, on ajouterait que ceci constitue bien une induction sur l'ensemble des formules. En effet, pour l'ordre sur les formules donné par $\varsigma(F) =$(nombre de $\forall$ dans $F$, nombre de $\exists$ et de connecteurs logiques dans $F$), $\varsigma(F)$ décroit à chaque étape d'induction.

**Corollaire** Soit $T$ une théorie sur un langage $\mathcal{L}$ au plus dénombrable. Si $T$ possède un modèle infini, alors $T$ possède un modèle au plus dénombrable.

**Lemme complémentaire** Si $\mathcal{M}$ est infini, le modèle $\mathcal{N}$ ainsi construit est en fait exactement dénombrable. En effet, la propriété « être un ensemble infini »étant axiomatisable, $\mathcal{M}$ a cette propriété si et seulement si $\mathcal{N}$ l'a.

# Références


[1] Cori, Lascar, *Logique mathématique, tome 2.*

[2] Hodges, *Model theory*


1. les cas d'induction commencent avec l'hypothèse, que l'on aurait pu préférer cacher sous le tapis : $\forall n, \forall a_1, ..., a_n in |\mathcal{N}|$