



Laboratoire
Paul Painlevé



école
normale
supérieure

AUTOUR DU PÔLYNOME DE JONES

GUÉRIN Alexis
Dirigé par VIRELIZIER Alexis
Laboratoire Paul Painlevé, Lille

Introduction

L'étude mathématique des nœuds ne débute que très récemment. En effet même si certains mathématiciens, comme Vandermonde et Gauss, s'intéressent aux nœuds, il faudra attendre la fin du XXème siècle pour qu'une véritable théorie mathématique émerge. Toutefois, jusqu'au milieu des années 1980, la théorie des nœuds n'est considérée que comme l'une des branches de la topologie. Une branche importante certes, mais n'intéresse pas beaucoup en dehors d'un petit cercle de spécialistes principalement allemands et américains en majorité. Aujourd'hui, les résultats de cette théorie mathématique sont convoités par les biologistes, les chimistes et les physiciens.

L'un des objectifs de cette théorie est d'établir une classification des nœuds, de savoir les différencier. Une des première table de nœuds est établie par le physicien Peter Guthrie Tait qui classe, sans trop d'erreurs, les nœuds ayant moins de 10 croisements (Figure 1). Pour savoir différencier deux noeuds, les mathématiciens créent ce que l'on appelle des invariants. C'est ce que nous allons principalement étudier dans ce qui suit.

Dans un premier temps nous poserons les bases de la théorie des nœuds en donnant la définition mathématique d'un nœud et surtout en définissant la relation d'équivalence entre deux nœuds. Puis nous construirons un invariant polynomial: le polynôme de Jones. Pour finir nous categorifions le polynôme de Jones en un invariant plus puissant : l'homologie de Khovanov.

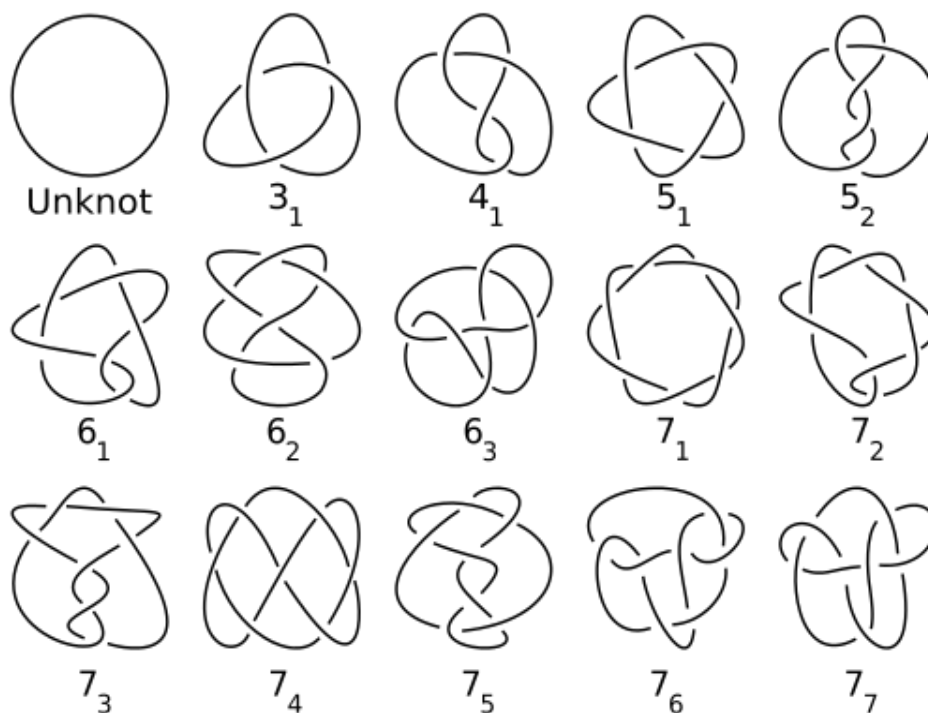


Figure 1: Table des nœuds premiers ayant au moins 7 croisements

1 Les bases de la théorie

1.1 La description mathématique de la réalité

En mathématiques les nœuds étudiés sont les nœuds que nous connaissons tous auxquels nous avons joints les deux bouts de la "corde". Nous étudierons également les entrelacs qui sont un enchevêtrement de plusieurs nœuds. Un nœud est donc un entrelac à une seule composante.

Définition 1.1 Un *nœud* est un plongement lisse de S^1 dans \mathbb{R}^3 ,
C'est à dire une application $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui induit un difféomorphisme de S^1 vers son image.
Un *entrelacs* à n composantes est un plongement lisse $L : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{n \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Nous allons maintenant définir une relation d'équivalence, appelée isotopie, sur l'ensemble des entrelacs. Intuitivement, deux entrelacs sont équivalents lorsque l'on peut déplacer la corde de l'un des entrelacs, sans sectionner celle-ci, pour arriver à l'autre. Mathématiquement cela se traduit de la façon suivante :

Définition 1.2 Deux entrelacs L_1 et L_2 sont dits *isotopes* s'il existe une isotopie entre eux, $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ lisse tel que :

- $\forall t \in [0, 1] F_t = F(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un difféomorphisme.
- $F_0 = id_{\mathbb{R}^3}$
- $F_1 \circ L_1 = L_2$

Remarque : L'isotopie des entrelacs est une relation d'équivalence

Reflexive : Pour tout entrelacs L , L est isotope à lui même avec l'isotopie triviale : $\forall (x, t) F(x, t) = x$

Symétrique : Soit L_1 un entrelacs isotope à L_2 grâce à l'isotopie F . Alors on peut vérifier facilement que L_2 est isotope à L_1 grâce à G tel que $\forall t, G_t = (F_t)^{-1}$.

Transitive : Soit L_1 qui est isotope à L_2 grâce à F et L_2 qui est isotope à L_3 grâce à G . Alors L_1 est isotope à L_3 grâce à H tel que $\forall t, H_t = G_t \circ F_t$.

Définition 1.3 Un *invariant* est une fonction qui à une classe d'isotopie d'un entrelacs associe une certaine quantité (booléen, groupe, pôlynome...).

Un exemple simple d'invariant d'entrelacs est la fonction qui à un entrelacs associe son nombre de composante. En effet il est facile de voir qu'un entrelacs à n composantes ne peut pas être équivalent à un entrelacs à m composantes lorsque $n \neq m$.

Les définitions 1.1 et 1.2 sont celles qui décrivent le mieux la réalité, mais développer une théorie en travaillant directement sur ces objets reste néanmoins compliqué. On va donc, à partir de ces définitions, créer et développer des outils qui vont rendre les manipulations beaucoup plus visuelles : les diagrammes d'entrelacs.

1.2 Diagrammes planaires d'entrelacs

Une façon simple et pratique de coder les entrelacs est de les représenter par des diagrammes planaires. Ces diagrammes sont des projections des entrelacs sur des plans convenablement choisis. En effet, lorsque l'on projette un entrelacs sur un plan il peut y avoir des projections qui ne sont pas acceptables. Par exemple, sur la Figure 2, on peut voir que la projection ne permet pas de connaître la nature exacte des croisements. Ces projections sont dites *singulières*.

On doit donc définir certaines conditions qui vont nous permettre d'éviter ces projections singulières. Ainsi soit L un entrelacs, une projection p de \mathbb{R}^3 sur un plan de \mathbb{R}^3 est dite *régulière* pour L si :

- (1) Pour tous points appartenant à la courbe représentant L , la tangente à la courbe en ce point doit être projetée en une droite. (i.e. la projection d'une droite tangente à la courbe de l'entrelacs ne doit jamais dégénérer en un point).
- (2) Il ne peut pas y avoir plus de deux points projetés sur un même point du plan de projection.
- (3) L'ensemble des points de croisement (où deux points différents de la courbe représentant L sont projetés) doit être fini et en chaque point de croisement les tangentes en ces points doivent être projetées en deux droites différentes.

On remarque donc que l'exemple de la Figure 2 est interdit grâce à la condition (2). En effet il y a 3 points différents qui sont projetés sur un même point du plan. Ainsi, il suffit de décaler légèrement un des brins pour que la projection vérifie les 3 conditions précédentes.

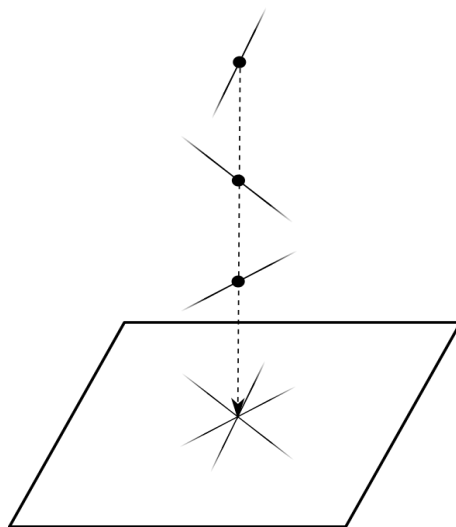


Figure 2: Exemple de projection singulière.

Définition 1.4 Un *diagramme (planair)* d'un entrelacs L est l'image de $p \circ L$, où p est une projection de \mathbb{R}^3 vers un plan de \mathbb{R}^3 régulière pour L , avec l'information dessus/dessous des brins de chaque croisement.

Par exemple, on a représenté ci-dessous le même croisement avec et sans l'information dessus/dessous.



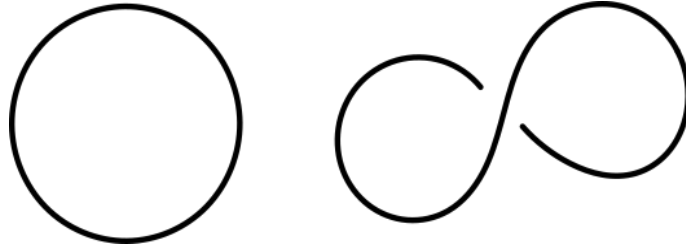


Figure 3: Deux diagrammes du nœud trivial.

1.3 Le théorème de Reidemeister

Toujours dans le but de simplifier notre théorie en manipulant les diagrammes d'entrelacs plutôt que leur courbe dans \mathbb{R}^3 , nous allons élaborer un théorème qui nous permet de dire si deux entrelacs sont équivalents ou non, seulement en manipulant leur diagramme. On doit ce théorème au mathématicien Kurt Reidemeister.

Pour pouvoir écrire notre théorème il nous faut d'abord décrire mathématiquement les manipulations triviales que l'on peut réaliser sur les diagrammes d'entrelacs.

Définition 1.5 Deux diagrammes planaires d'entrelacs D_1 et D_2 sont dit *équivalents* s'il existe une isotopie plane entre eux, c'est à dire $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ lisse tel que

- $\forall t \in [0, 1] F_t = F(\cdot, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme.
- $F_0 = id_{\mathbb{R}^2}$
- $F_1 \circ D_1 = D_2$

Les mouvements suivants sont caractéristiques des isotopies planes :



Figure 4: Mouvements caractéristiques d'isotopie plane.

Notons que lors d'une isotopie plane, les situations suivantes ne sont pas autorisées :

- (1) Un nouveau croisement apparait ou un ancien disparaît
- (2) Les projections de deux branches d'un entrelacs deviennent tangentes
- (3) Les points de trois branches d'un entrelacs sont projetés sur le même point.

Mais lorsque l'on utilise des isotopies dans l'espace sur un entrelacs ces trois types de situation peuvent se produire sur son diagramme. On se sert alors des trois mouvements de Reidemeister pour faire le lien entre isotopie dans l'espace et isotopie plane. Ces trois mouvements, représentés sur la Figure 5, sont les suivants:

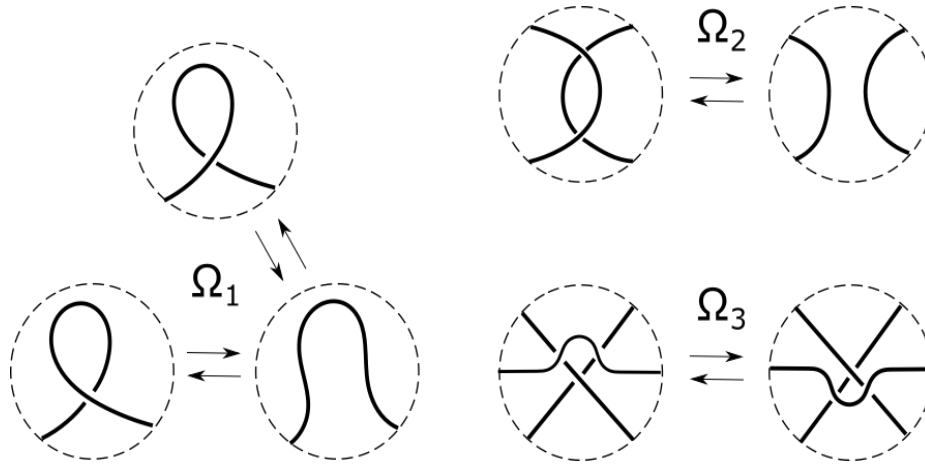


Figure 5: Les mouvements de Reidemeister

- Ω_1 apparition (disparition) d'une petite boucle
- Ω_2 apparition (disparition) de croisements jumelés
- Ω_3 passage d'une troisième branche par dessus un croisement

En faisant le lien entre les isotopies dans l'espace et les isotopies planes, on peut donc écrire le théorème de Reidemeister :

Théorème de Reidemeister : Deux diagrammes d'entrelacs représentent deux entrelacs isotopes si et seulement si un des deux diagrammes peut être obtenu à partir de l'autre grâce à une séquence finie de mouvement de Reidemeister et d'isotopies planes.

Ce théorème nous permet donc de réduire notre théorie à l'étude des classes d'équivalences des diagrammes d'entrelacs. Dans la suite nous ne feront donc pas toujours la distinction entre un nœud et son diagramme.

1.4 Invariants d'entrelacs

Pour rappel, nous cherchons à développer des invariants d'entrelacs, qui nous permettent de faire la différence entre deux entrelacs non isotopes.

Pour vérifier qu'une fonction qui va de l'ensemble des diagrammes planaires d'entrelacs dans un ensemble quelconque, est un invariant il nous suffit de vérifier que cette fonction reste constante si on modifie un diagramme en utilisant un des trois mouvements de Reidemeister ou une isotopie plane.

Ainsi si un invariant associe à deux diagrammes d'entrelacs une valeur différente alors ces deux diagrammes représentent deux entrelacs différents. En revanche si la valeur est la même les deux diagrammes ne représentent pas forcément le même entrelacs.

Si un invariant associe à chaque classe d'isotopie une valeur différente, c'est à dire que l'invariant nous permet de faire la distinction entre toutes les classes d'isotopie, alors cet invariant est dit complet.

Pour mieux comprendre cette notion nous allons étudier un exemple d'invariant : la tricolorabilité des entrelacs. Cet invariant associe à chaque entrelacs un booléen. En effet, on va pouvoir faire la distinction entre les entrelacs qui sont tricolorables ou non.

Un diagramme d'entrelacs est *tricolorable* si chaque brin du diagramme d'entrelacs peut être coloré avec l'une des trois couleurs, sous réserve des règles suivantes :

- au moins deux couleurs sont utilisées.
- à chaque croisement, les trois branches qui forment ce croisement ont soit, la même couleur, soit trois couleurs différentes.

Il est clair que le caractère tricolorable d'un entrelacs est stable par isotopie plane. L'invariance par les trois mouvements de Reidemeister se montre au cas par cas. Certains calculs sont présentés ci-dessous :

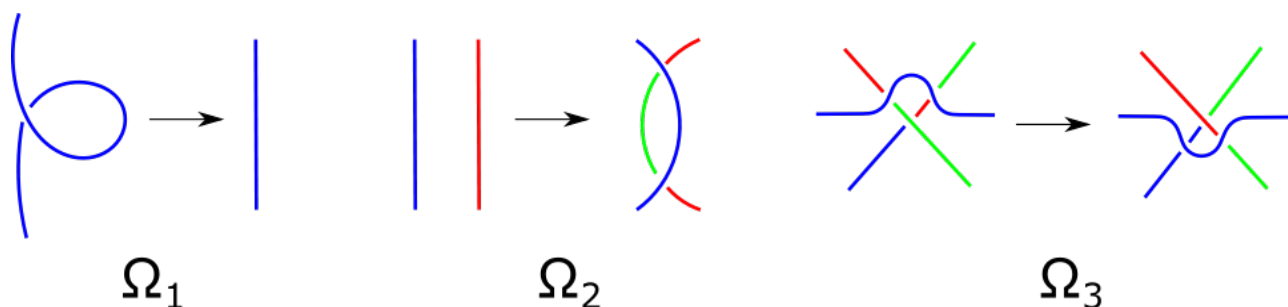


Figure 6: Les trois mouvements de Reidemeister conserve la tricolorabilité d'un nœud.

On peut maintenant dire qu'un entrelacs est tricolorable si un (et donc tous) ses diagrammes sont tricolorables. Cet invariant n'est pas très puissant car il ne fait que diviser en deux l'ensemble des classes d'isotopie. Mais il peut nous aider à prouver certains résultats comme le fait que le nœud de trèfle n'est pas dénouable (isotope au nœud trivial). En effet comme le montre la Figure 7, le trèfle est un nœud tricolorable alors que le nœud trivial ne l'est pas. Il ne sont donc pas isotopes.

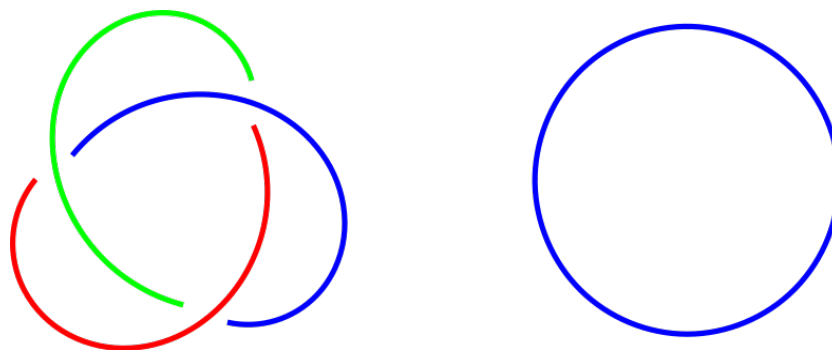


Figure 7: Colaration du nœud de trèfle (3_1) et du nœud trivial.

1.5 Somme de nœuds

Nous allons maintenant munir notre ensemble de nœuds d'une somme. Cette somme va nous permettre de réduire le nombre de nœuds à classer.

Soit deux nœuds K_1 et K_2 la somme de ces deux nœuds est définie de la façon suivante :

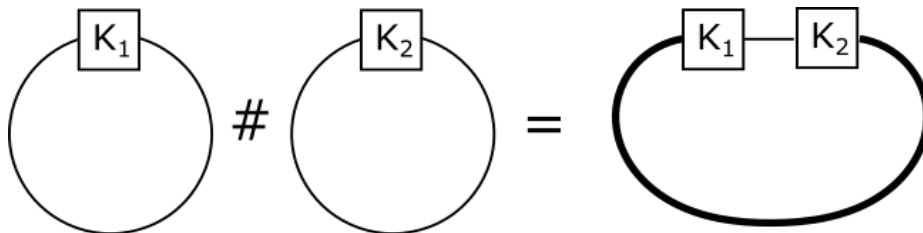


Figure 8: Somme de deux nœuds

Il est immédiat que cette somme est commutative et associative.

Définition 1.6 Un nœud K est dit premier s'il n'est pas le nœud trivial ou si $K = K_1 \# K_2$ implique que K_1 ou K_2 soit le nœud trivial.

Théorème de décomposition en facteur premier d'un nœud. Tout nœud non trivial admet une unique décomposition en somme de nœuds premiers.

Ainsi pour différencier deux nœuds il nous suffit d'étudier leur décomposition en nœud premier. Nous allons donc chercher à décrire l'ensemble de nœuds premiers.

L'existence d'une telle décomposition est assurée par la proposition suivante :

Proposition 1.7 Si le nœud K_1 n'est pas le nœud trivial alors pour tout nœud K_2 , $K_1 \# K_2$ n'est pas le nœud trivial.

2 Un invariant polynomial : le polynôme de Jones.

Découvert par le mathématicien Vaughan Jones, le polynôme de Jones est un invariant de la théorie des entrelacs qui trouve aussi des applications non seulement en théorie des nœuds, mais également en théorie des représentations ou encore en physique statistiques. Sa construction a été simplifiée par le mathématicien Louis Kauffman.

Le polynôme de Jones est défini pour les entrelacs orientés. Un entrelacs est *orientés* si on a choisit un sens de parcours pour chacune de ses composantes. Ces orientations sont représentées par des flèches sur le digramme de l'entrelacs.

Définition-Théorème 2.1 Le polynôme de Jones est une fonction :

$$V : \{\text{Entrelacs orientés}\} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{-1/2}, q^{1/2}]$$

tel que :

$$(1) \ V(\bigcirc) = 1$$

$$(2) \ q^{-1}V(\text{crossing}) - qV(\text{crossing}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{cup})V(\text{cap}) \quad (\text{relation d'écheveau})$$

Nous prouvons l'existence et l'unicité d'un tel polynôme dans les parties 2.3. Nous démontrons également qu'un tel polynôme est un invariant des entrelacs orientés.

Propriété 2.2 Soit L un entrelacs orienté. Alors

$$(3) \ V(L') = V(L \sqcup \bigcirc) = -(q^{1/2} + q^{-1/2})V(L)$$

où $L \sqcup \bigcirc$ dénote l'union disjointe de L et d'un nœud trivial.



Preuve : On va utiliser la relation (2) de la définition du polynôme de Jones :

$$q^{-1}V(\text{crossing}) - qV(\text{crossing}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L')$$

donc :

$$V(L') = \frac{q^{-1} - q}{q^{1/2} - q^{-1/2}}V(L) = -(q^{1/2} + q^{-1/2})V(L)$$

□

Nous allons maintenant présenter le calcul du polynôme de Jones du nœud de trèfle  et de l'entrelacs de Hopf  en utilisant les relations (1) (2) et (3).

$$q^{-1}V(\text{Hopf link}) - qV(\text{Hopf link}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{trefoil})$$

L'entrelacs à deux composantes dans la partie droite de l'égalité est l'entrelacs de Hopf. Calculons son polynôme de Jones :

$$q^{-1}V(\text{Hopf link}) - qV(\text{Hopf link}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{Hopf link})$$

En utilisant les conditions (1) et (3) :

$$\begin{aligned} V(\text{Hof}) &= -q^{-2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) - q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2}) \\ &= -q^{-1/2} - q^{-5/2} \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} V(\text{Hof} \sqcup \text{Hof}) &= q^{-2} + q^{-1}(q^{-1/2} + q^{-5/2})(q^{1/2} - q^{-1/2}) \\ &= q^{-1} - q^{-3} - q^{-4} \end{aligned}$$

Remarque : D'après la relation (3) de la propriété 2.2 on sait que

$$V(\text{Hof}) = -(q^{1/2} + q^{-1/2}) \neq V(\text{Hof})$$

ainsi on a prouvé que l'on ne peut pas séparer les deux composantes de l'entrelacs de Hof (i.e. l'entrelacs de Hof et l'union disjointe de deux nœuds triviaux ne sont pas isotopes).

2.1 Le crochet de Kauffman.

Définition 2.3 Soit une variable a . Le crochet de Kauffman d'un diagramme d'entrelacs D est un polynôme $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}]$ qui vérifie les relations suivantes :

$$(1) \langle \text{X} \rangle = a \langle \text{A} \rangle + a^{-1} \langle \text{B} \rangle$$

$$(2) \langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2}) \langle D \rangle$$

$$(3) \langle \bigcirc \rangle = 1$$

La relation (2) signifie que lorsque le diagramme contient une composante circulaire qui n'admet pas de point de croisement en commun avec l'entrelac L alors cela revient à calculer le crochet de Kauffman de L multiplié par $-a^2 - a^{-2}$. Tout comme pour la propriété 2.2, on peut prouver que (1) \Rightarrow (2).

Dans la suite nous aurons besoin de travailler avec des entrelacs qui sont orientés, mais pour le crochet de Kauffman, on peut remarquer qu'orienter l'entrelac n'est pas nécessaire. En effet si on réécrit la relation (1) : $\langle L \rangle = a \langle L_A \rangle + a^{-1} \langle L_B \rangle$, on peut remarquer que les branches de l'entrelac L_A et L_B sont dans les régions A et B (Figure 9), qui sont définies de la façon suivante : lorsque l'on se déplace sur la branche du haut de l'entrelac L on voit d'abord la région A à gauche et la région B à droite. Quelque soit le sens dans lequel on se déplace.

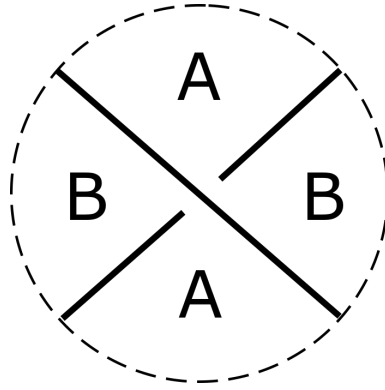


Figure 9: Régions A et B à proximité d'un croisement.

Il est facile de voir que le pôle de Jones est invariant par isotopie plane. Maintenant essayons de voir comment se comporte le crochet de Kauffman avec les trois mouvements de Reidemeister. Commençons par le mouvement Ω_2 :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= a[a \langle \text{Diagram 4} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 5} \rangle] + a^{-1}[a \langle \text{Diagram 6} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 7} \rangle] \\
 &= (a^2 + a^{-2} - a^2 - a^{-2}) \langle \text{Diagram 8} \rangle + \langle \text{Diagram 9} \rangle \\
 &= \langle \text{Diagram 9} \rangle
 \end{aligned}$$

Testons Ω_3 :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 10} \rangle &= a \langle \text{Diagram 11} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 12} \rangle \\
 \langle \text{Diagram 13} \rangle &= a \langle \text{Diagram 14} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 15} \rangle
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le crochet de Kauffman respecte le mouvement Ω_2 , on peut prouver que

$$\langle \text{Diagram 16} \rangle = \langle \text{Diagram 17} \rangle :$$

$$\langle \text{Diagram 18} \rangle = \langle \text{Diagram 19} \rangle = \langle \text{Diagram 20} \rangle$$

Et de plus, par isotopie plane on a directement que $\langle \text{Diagram 21} \rangle = \langle \text{Diagram 22} \rangle$. En comparant les deux lignes du début, on a donc prouvé que le crochet de Kauffman respectait le mouvement Ω_3 . Etudions maintenant le mouvement Ω_1 :

$$\langle \text{Boucle} \rangle = a \langle \text{Boucle} \rangle + a^{-1} \langle \text{Boucle} \rangle = [a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1}] \langle \text{Boucle} \rangle = -a^3 \langle \text{Boucle} \rangle$$

Un calcul similaire nous donne pour l'autre boucle :

$$\langle \text{Boucle} \rangle = -a^{-3} \langle \text{Boucle} \rangle$$

Si $a \neq -1$, le crochet de Kauffman ne définit pas un invariant car il ne respecte pas le mouvement Ω_1 . On a par exemple que les deux diagrammes suivants représentent bien le même nœud, pourtant leur crochet de Kauffman est différent :

$$\langle \infty \rangle = -a^3, \quad \langle \infty \rangle = -a^{-3}$$

Proposition 2.2 Il existe un unique pôleynome $\langle D \rangle$ qui satisfait les conditions (1), (2) et (3).

Preuve : Soit D un diagramme d'entrelac. Numerotons chaque croisement du diagramme et assignons à chacun de ces croisements un état A ou B . On note alors x_i l'état du croisement i . Le choix de l'état d'un croisement va définir la façon dont on va le résoudre (Figure 10). Un choix d'état, pour tous les croisements du diagramme, est appelé état du diagramme D . Soit n le nombre de croisements de D , ainsi le nombre d'états de D est 2^n . Tout état s du diagramme D correspond à un système de cercles qui ne s'intersectent pas, obtenu par élimination de tous les croisements du diagramme via les modifications associées aux états de chaque croisements (illustré sur la Figure 10).

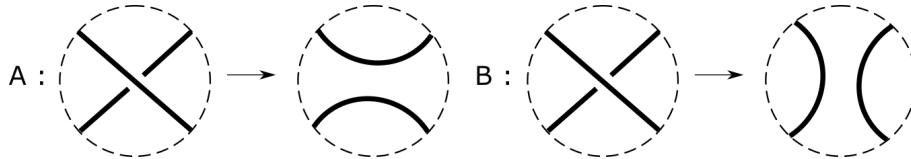


Figure 10: Types de modifications associées aux états A et B .

Pour un état s du diagramme, on note respectivement $\delta(s)$ et $\beta(s)$ le nombre de croisements dans l'état A et dans l'état B , et $\gamma(s)$ le nombre de cercle du système de cercle associé à l'état s .

Si on utilise maintenant la condition (1) pour détruire chaque croisements du diagramme, et que l'on utilise les conditions (2) et (3) pour calculer le pôleynome associé au diagramme constitué de cercles qui ne s'intersectent pas, on obtient :

$$\langle D \rangle = \sum_s a^{\delta(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} = \sum_s a^{\delta(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$$

De cette expression on en déduit l'unicité du pôleynome. Verifions maintenant que l'expression trouvée précédemment satisfait bien les conditions (1), (2) et (3) :

Soit K_0 le nœud trivial. Alors, il n'y a qu'un seul état s , celui d'origine, et $\delta(s) = 0$, $\beta(s) = 0$ et $\gamma(s) = 1$, on retrouve bien la condition (3). Pour un entrelac D si on lui ajoute un cercle alors pour tout état s avant l'ajout du cercle, correspond un état s' après l'ajout, où $\delta(s) = \delta(s')$, $\beta(s) = \beta(s')$ et $\gamma(s) = \gamma(s') + 1$. On obtient alors la condition (2). Pour la condition (1), si on considère le

croisement numéro i on sépare alors la somme en deux, une partie où tous les états du diagramme ont $x_i = A$ et une autre où tous les états du diagramme ont $x_i = B$. Puis dans la première somme, on factorise par a et dans la deuxième on factorise par b . On obtient ainsi la condition (1).

On a donc prouvé l'existence du crochet de Kauffman.

□

2.2 Nombre de torsion

A partir de maintenant nous allons considérer que les nœuds et les entrelacs sont orientés. Cette orientation est représentée par une flèche sur le diagramme.

Définition 2.3 Le *nombre de torsion* d'un diagramme d'entrelacs orienté D est :

$$w(D) = \sum_c \epsilon_c$$

où la somme est indexée par les croisements du diagramme D et les ϵ_c valent 1 ou -1 selon la nature du croisement envisagé, comme le montre la Figure 11.

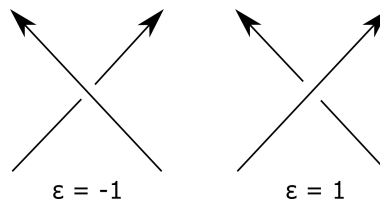


Figure 11: Croisement négatif (à gauche) ou positif (à droite)

On peut remarquer que si toutes les composantes d'un entrelac changent d'orientation alors la valeur du nombre de torsion ne change pas.

Le calcul du nombre de torsion de certains nœuds est présenté ci-dessous :

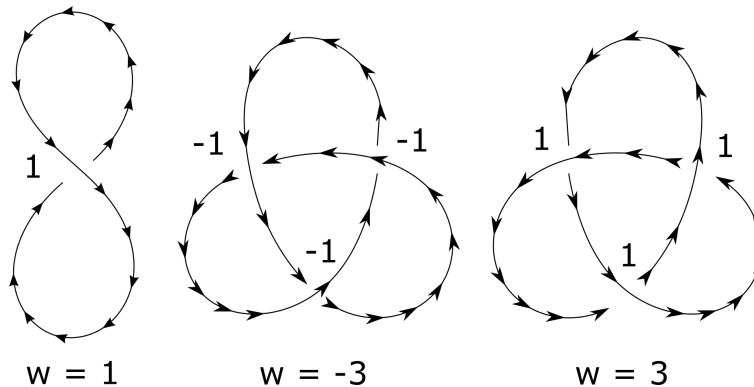


Figure 12: Calcul du nombre de torsion de certains nœuds.

Le nombre de torsion est invariant pour isotopie plane et par les mouvements Ω_2 et Ω_3 . En effet pour Ω_2 les signes des deux croisements (qui apparaissent ou disparaissent) sont opposés. Leur apparition ou disparition, n'a donc aucun effet sur le nombre de torsion. Pour Ω_3 le signe des croisements A, B et C (Figure 13) sont respectivement les mêmes que A', B' et $C' (= C)$.

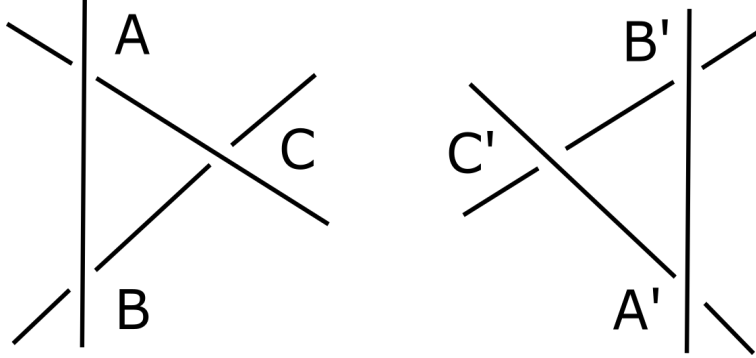


Figure 13: Le nombre de torsion est invariant par le mouvement Ω_3

En revanche, pour le mouvement Ω_1 , il y a un croisement qui apparait (ou disparaît). Le nombre de torsion varie donc de ± 1 .

2.3 Existence et unicité du pôleynome de Jones

Définition 2.4 Pour un diagramme d'entrelacs orienté D , on définit le pôleynome $\tilde{V}(D) \in \mathbb{Z}[q^{-1/4}, q^{1/4}]$ par :

$$\tilde{V}(D) = \left((-a)^{-3w(D)} \langle |D| \rangle \right)_{a=q^{-1/4}}$$

Où $|D|$ est le diagramme non orienté obtenu à partir de D en oubliant les orientations.

Proposition 2.5 Le pôleynome \tilde{V} est un invariant des nœuds orientés.

Preuve : On sait que $w(D)$ et $\langle |D| \rangle$ sont invariants par modification de D avec les mouvements de Reidemeister Ω_2 et Ω_3 et par isotopie plane. Ainsi $\tilde{V}(D)$ est invariant par action de ces mêmes mouvements sur D . Il nous suffit de montrer que $\tilde{V}(D)$ est invariant par action de Ω_1 sur D . Or $w(D)$ et $\langle |D| \rangle$ changent avec Ω_1 , mais leurs changements se compensent :

$$\langle \text{Boucle} \rangle = -a^{-3} \langle \text{Boucle} \rangle \quad \text{et} \quad w(\text{Boucle}) = w(\text{Boucle}) - 1$$

Ainsi, grâce à la définition de $\tilde{V}(D)$:

$$\tilde{V}(\text{Boucle}) = (-q^{3/4})(-q^{-3/4})\tilde{V}(\text{Boucle}) = \tilde{V}(\text{Boucle})$$

On effectue les mêmes calculs pour le mouvement Ω_1 , avec l'autre type de boucle :

$$\langle \text{Reidemeister 1} \rangle = -a^3 \langle \text{Reidemeister 2} \rangle \quad \text{et} \quad w(\text{Reidemeister 1}) = w(\text{Reidemeister 2}) + 1$$

$$\tilde{V}(\text{Reidemeister 1}) = (-q^{-3/4})(-q^{3/4})\tilde{V}(\text{Reidemeister 2}) = \tilde{V}(\text{Reidemeister 2})$$

$\tilde{V}(D)$ est donc invariant par action des trois mouvements de Reidemeister sur D . On en conclut que le pôleynome $\tilde{V}(D)$ est bien un invariant des nœuds orientés.

□

On va maintenant prouver l'existence du pôleynome de Jones, en démontrant que le pôleynome $\tilde{V}(D)$ verifie les deux relations de la définition 2.1 :

Utilisons la relation (1) de la définition du crochet de Kauffman :

$$\langle \text{Crossing 1} \rangle = a \langle \text{Arc 1} \rangle + a^{-1} \langle \text{Arc 2} \rangle$$

$$\langle \text{Crossing 2} \rangle = a^{-1} \langle \text{Arc 1} \rangle + a \langle \text{Arc 2} \rangle$$

On multiplie la première ligne par $-a^{-1}$ et la seconde par a puis on les somme. Ce qui nous donne :

$$a \langle \text{Crossing 1} \rangle - a^{-1} \langle \text{Crossing 2} \rangle = (a^2 - a^{-2}) \langle \text{Arc 1} \rangle$$

En choisissant une orientation appropriée, on obtient :

$$a \langle \text{Crossing 1} \rangle - a^{-1} \langle \text{Crossing 2} \rangle = (a^2 - a^{-2}) \langle \text{Arc 1} \rangle$$

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

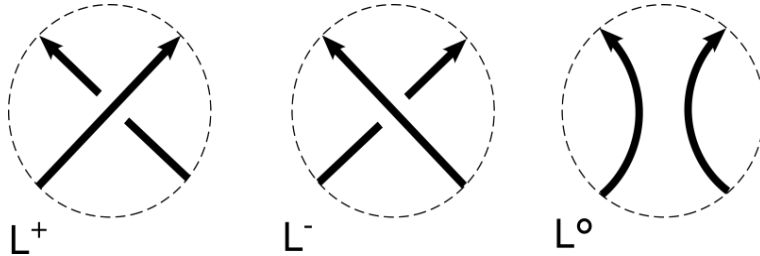


Figure 14: Notations pour les différents croisements.

Puis en remarquant que $w(L^+) = w(L^0) + 1$ et $w(L^-) = w(L^0) - 1$ on obtient que :

$$\begin{aligned}
& a(-a)^3\tilde{V}(L^+) - a^{-1}(-a)^{-3}\tilde{V}(L^-) = (a^2 - a^{-2})\tilde{V}(L^o) \\
\iff & -a^4\tilde{V}(L^+) + a^{-4}\tilde{V}(L^-) = (a^2 - a^{-2})\tilde{V}(L^o) \\
\iff & -q^{-1}\tilde{V}(L^+) + q\tilde{V}(L^-) = (q^{-1/2} - q^{1/2})\tilde{V}(L^o)
\end{aligned}$$

Et en utilisant les relations (2) et (3) qui définissent le crochet de Kauffman, on trouve que :

$$\tilde{V}\left(\bigcirc\right) = 1$$

On a donc défini un pôleynome qui verifie les relations (1) et (2) de la définition du pôleynome de Jones. Montrons qu'un tel pôleynome est unique.

La relation (2) de la définition 2.1, appelée relation d'écheveau (skein relation), ne fait pas que détruire le croisement considéré. En effet on le détruit mais aussi on le change en un croisement opposé. Ainsi certains croisements ne font qu'alterner entre L^+ et L^- . Donc on ne fait qu'appliquer la relation d'écheveau (1) à ces croisements.

Prouvons que cette stratégie est viable :

Proposition 2.6 Pour tout entrelacs L ayant m composantes, celui-ci peut être transformé en m nœuds triviaux par une séquence finie de changement de type de croisement (L^+ en L^- ou inversement).

Preuve : On suppose d'abord que $m = 1$ (ie L est un nœud). Au lieu de considérer le diagramme de L nous allons considérer son "ombre" (ie une courbe plane qui s'intersecte avec elle même). On choisit, dans le plan de projection, une droite l qui est tangente à la courbe de l'ombre. On note P le point d'intersection de la droite l et de l'ombre. On choisit maintenant deux points A et B qui sont sur la droite l' orthogonale au plan de projection et passant par P tel que A doit être situé plus loin du plan de projection que B . On considère maintenant un point qui bouge au dessus de l'ombre du nœud et dont la trajectoire commence en A . La trajectoire de ce point projetée sur le plan projection du nœud a exactement la forme de l'ombre, mais la distance du point au plan ne fait que décroître. Sa trajectoire se finit au point B . (Figure 15) On ferme la trajectoire de ce point en reliant les points A et B pour un segment. On obtient ainsi le nœud trivial (puisque sa projection sur un plan orthogonal à la droite l n'admet aucun croisement). Ainsi en modifiant judicieusement les croisements d'un nœud, on peut le dénouer.

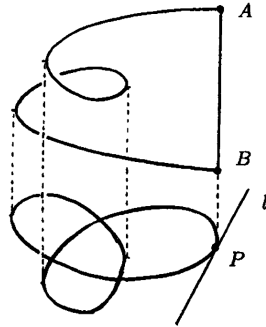


Figure 15: Dénouement du nœud de trèfle en changeant ses croisements.

Maintenant pour un entrelac à m composantes, avec $m \neq 1$, on applique la même construction à toutes les composantes en prenant soin de localiser chacun des nœuds triviaux à une altitude différente. Cette condition est assurée si les projections des segments $[A_i, B_i]$ sur l'axe verticale ne s'intersectent pas.

□

Prouvons maintenant l'unicité du pôleynome de Jones. Soient deux pôleynomes V et V' qui verifient les relations du pôleynome de Jones (1), (2) et (3) que l'on rappelle ici :

$$(1) V(\bigcirc) = 1$$

$$(2) q^{-1}V(\text{diagramme de croisement positif}) - qV(\text{diagramme de croisement négatif}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{diagramme de croisement positif}) V(\text{diagramme de croisement négatif}) \quad (\text{relation d'écheveau})$$

$$(3) V(L \sqcup \bigcirc) = -(q^{1/2} + q^{-1/2})V(L)$$

On note $E_n := \{\text{diagramme d'entrelacs qui ont au plus } n \text{ croisements}\}$. Procédons par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $E_n := \{\bigcirc, \bigcirc \sqcup \bigcirc, \bigcirc \sqcup \bigcirc \sqcup \bigcirc, \dots\}$. Or grâce aux relations (1) et (3), pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$V(\underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{m \text{ fois}}) = (-q^{1/2} - q^{-1/2})^{m-1} = V'(\underbrace{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}_{m \text{ fois}}) \text{ et } V(\bigcirc) = 1 = V'(\bigcirc)$$

Hérédité : On suppose que V et V' sont égaux sur E_n . Soit $D \in E_{n+1}$. D'après la propriété 2.6, il existe une séquence finie de changement de type de croisement tel que le diagramme obtenu après ces changements soit dans E_0 . On note D_i le diagramme après le i -ème changement. Ainsi $D = D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \dots \rightarrow D_k \in E_0$. On suppose que le premier changement est du type :

$$\text{diagramme de croisement positif} \rightarrow \text{diagramme de croisement négatif}. \text{ On peut donc écrire :}$$

$$V(D) = V(D_0) = q(q^{1/2} - q^{-1/2})V(\widehat{D}_1) + q^2V(D_1)$$

Or $\widehat{D}_1 \in E_n$. Puis, toujours en utilisant la relation d'écheveau pour V , on peut exprimer $V(D_1)$ en fonction de $V(D_2)$ et du pôleynome de Jones d'un diagramme dans E_n que l'on note \widehat{D}_2 . En répétant ce procédé $k-2$ fois, on exprime $V(D)$ en fonction de $V(D_k)$ et de k pôleynomes de Jones de diagrammes qui sont dans E_n ($\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \dots, \widehat{D}_k$). Or par hypothèse de récurrence $V(D_k) = V'(D_k)$, $V(\widehat{D}_1) = V'(\widehat{D}_1) \dots V(\widehat{D}_k) = V'(\widehat{D}_k)$. Donc $V(D) = V'(D)$.

2.4 Quelques remarques sur le pôleynome de Jones

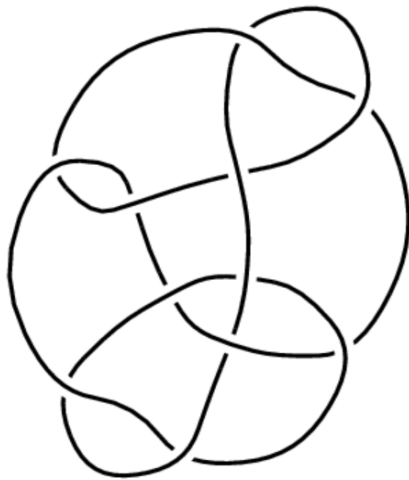
Le pôleynome de Jones peut nous aider à prouver certains résultats. En effet grâce à cet invariant on peut prouver que le nœud de trèfle droit et le nœud de trèfle gauche (l'un est l'image de l'autre dans un miroir) ne sont pas isotopes :

$$V\left(\text{Diagram 1}\right) = -q^{-4} + q^{-3} + q$$

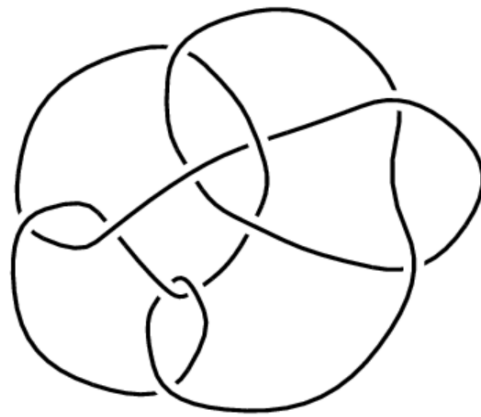
$$V\left(\text{Diagram 2}\right) = -q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}$$

Le pôleynome de Jones n'est pas un invariant complet. En effet il associe à certains entrelacs, qui ne sont pas isotopes, le même pôleynome. Sur la Figure 16, on peut voir deux diagrammes de deux nœuds qui ne sont pas isotopes mais qui ont pourtant le même pôleynome de Jones.

$$V(K_{11.34}) = q^{-6} - 2q^{-5} + 2q^{-4} - 2q^{-3} + q^{-2} + 2q - 2q^2 + 2q^3 - q^4 = V(K_{11.42})$$



11.34



11.42

Figure 16: Deux nœuds non isotopes ayant le même pôleynome de Jones.

Nous allons donner une autre forme du pôleynome de Jones, que nous utiliserons dans la partie suivante :

Dans la preuve de la proposition 2.2 on exhibe une forme explicite du crochet de Kauffman. On la rappelle ci-dessous :

$$\langle D \rangle = \sum_s a^{\delta(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$$

Où s est un état du diagramme D (ie le diagramme D auquel on a choisit un état de résolution pour chaque croisements (Figure 10)), $\delta(s)$ est le nombre de croisement dans l'état de résolution A (Figure 10) de l'état s du diagramme D , $\beta(s)$ le nombre de croisement dans l'état de résolution B de l'état s du diagramme D , et $\gamma(s)$ le nombre de cercle du système associé à l'état s .

On sait qu'il y a 2^n états s pour un diagramme d'entrelacs ayant n croisements . On associe alors à chacun de ces états s un n-uplet de 0 et de 1. Chaque chiffre de ce n-uplet correspond à un

croisement, si ce croisement est dans l'état A alors ce chiffre est 0, s'il est dans l'état B ce chiffre est 1.

On note alors n_+ le nombre de croisement dit positif du diagramme D , ie les croisements dans la configuration L^+ (Figure 14) et n_- le nombre de croisement dit négatif du diagramme D , ie les croisements dans la configuration L^- (Figure 14). On note également r_α le nombre de 1 dans le n-uplet α , et k_α le nombre de cercles du système associé à l'état qui est associé au n-uplet α . En d'autres termes, soit α le n-uplet associé à l'état s :

- $\delta(s) = n_+ + n_- - r_\alpha$
- $\beta(s) = r_\alpha$
- $\gamma(s) = k_\alpha$

Ainsi on peut réécrire l'expression du crochet de Kauffman pour un diagramme d'entrelacs D ayant n croisements :

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} a^{n_+ + n_- - 2r_\alpha} (-a^2 - a^{-2})^{k_\alpha - 1}$$

En utilisant les mêmes notations, on peut écrire :

Proposition 2.6 Le pôleynome de Jones d'un diagramme d'entrelacs D peut s'écrire de la façon suivante :

$$V(D) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-1)^{n_+ - n_- + k_\alpha - 1} q^{\frac{1}{2}(r_\alpha + n_+ - 2n_-)} (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})^{k_\alpha - 1}$$

Preuve : Dans la partie 2.3 on a prouvé que le pôleynome de Jones pouvait s'écrire ainsi :

$$V(D) = \left((-a)^{-3w(D)} \langle |D| \rangle \right)_{a=q^{-1/4}}$$

En utilisant l'expression précédente du crochet de Kauffman et que $w(D) = n_+ - n_-$, on obtient l'expression voulue :

$$\begin{aligned} V(D) &= \left((-a)^{-3(n_+ - n_-)} \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} a^{n_+ + n_- - 2r_\alpha} (-a^2 - a^{-2})^{k_\alpha - 1} \right)_{a=q^{-1/4}} \\ &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-1)^{-3n_+ + 3n_- + k_\alpha - 1} q^{\frac{1}{2}(r_\alpha + n_+ - 2n_-)} (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})^{k_\alpha - 1} \\ &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-1)^{n_+ - n_- + k_\alpha - 1} q^{\frac{1}{2}(r_\alpha + n_+ - 2n_-)} (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})^{k_\alpha - 1} \end{aligned}$$

□

Dans la partie suivante nous allons travailler avec le pôleynome de Jones non-normalisé.

Définition 2.7 Le pôleynome de Jones non normalisé, noté \widehat{V} , d'un diagramme d'entrelacs D est défini ainsi :

$$\widehat{V}(D) = \left((-q^{1/2} - q^{-1/2})V(D) \right)_{t=-q^{1/2}}$$

Remarque 2.8 Grâce à la proposition 2.6 on peut écrire que pour tout diagramme d'entrelacs D

$$\widehat{V}(D) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-1)^{r_\alpha + n_-} t^{r_\alpha + n_+ - 2n_-} (t + t^{-1})^{k_\alpha}$$

3 Catégorification du pôleynome de Jones : L'homologie de Khovanov

Dans cette section, nous construisons l'homologie de Khovanov, qui est un invariant plus puissant que le pôleynome de Jones (il pourra distinguer plus d'entrelacs différents que le pôleynome de Jones).

Soit D un diagramme d'entrelacs. Nous allons associer à ce diagramme un complexe de chaîne bi-graduée notée $C^{*,*}(D)$.

$$D \xrightarrow{\text{Khovanov}} C^{*,*}(D)$$

Puis nous allons associer à ce complexe de chaîne une homologie : l'homologie de Khovanov notée $KH^{*,*}(D)$.

$$C^{*,*}(D) \xrightarrow{\text{Homologie}} KH^{*,*}(D)$$

De plus cette homologie aura comme propriétés :

- (1) Si deux diagrammes d'entrelacs D et D' représentent deux entrelacs isotopes alors il existe un isomorphisme tel que :

$$KH^{*,*}(D) \cong KH^{*,*}(D')$$

- (2) La caractéristique d'Euler graduée de l'homologie de Khovanov d'un diagramme d'entrelacs D sera égale au pôleynome de Jones non normalisée de celui-ci.

$$\chi(C^{*,*}(D)) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^j \dim(KH^{i,j}(D)) = \widehat{V}(D)$$

On dit que l'homologie de Khovanov catégorifie le pôleynome de Jones.

3.1 Construction de la chaîne $C^{*,*}(\cdot)$.

Définition 3.1 Soit W un \mathbb{Q} -espace vectoriel. W est dit \mathbb{Z} -graduée de dimension finie s'il existe $(W^m)_{m \in \mathbb{Z}}$ une suite de \mathbb{Q} -espace vectoriel dont $\{m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } W^m \neq \emptyset\}$ est un ensemble fini tel que : $W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W^m$

Définition 3.2 La *dimension graduée* d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -graduée de dimension finie $W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W^m$ est défini ainsi :

$$qdim(W) = \sum_m q^m \dim(W^m) \in \mathbb{Z}[q^{-1}, q]$$

Propriété 3.3 Soient W et V deux \mathbb{Q} -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués de dimension finie, ie $W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} W^m$ et $V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V^m$. Alors :

- (1) $W \oplus V = \bigoplus_m (W \oplus V)^m$ avec $(W \oplus V)^m = W^m \oplus V^m$
- (2) $W \otimes V = \bigoplus_m (W \otimes V)^m$ avec $(W \otimes V)^m = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} (W^a \otimes V^{m-a})$

Propriété 3.4 Soient W et V deux \mathbb{Q} -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués de dimension finie. La dimension gradué satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $qdim(W \oplus V) = qdim(W) + qdim(V)$
- (2) $qdim(W \otimes V) = qdim(W)qdim(V)$

Définition 3.5 Soient W un \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué de dimension finie et $w \in W$. On dit que w est homogène de degré $n \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $w \in W^n$. On note $deg(w) = n$ ou $deg_W(w) = n$.

Définition 3.6 Soient W un \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué de dimension finie et l un entier relatif. On défini $W\{l\}$ comme étant le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué de dimension finie tel que :

$$W\{l\}^m = W^{m-l}$$

On peut noter que $qdim(W\{l\}) = q^l qdim(W)$ et que $deg(w)_{W\{l\}} = deg(w)_W - l$.

Nous avons maintenant tous les outils pour construire la chaine bi-graduée $C^{*,*}(D)$:

Soit $V = \mathbb{Q}\{1, x\} = Vect_{\mathbb{Q}}(1, x)$ ainsi V est un \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué de dimension finie où on impose que $deg(x) = -1$ et $deg(1) = 1$.

Ainsi $qdim(V) = q + q^{-1}$ et grâce à la propriété 3.4, on peut remarquer que $\forall k \in \mathbb{Z} : qdim(V^{\otimes k}) = qdim(V)^k = (q + q^{-1})^k$.

Soit D un diagramme d'entrelacs à n croisements. On rappelle qu'à ce diagramme on associe on associe 2^n états représentés par des n -uplets $\alpha \in \{0, 1\}^n$. Á chacun de ces états nous allons associer un \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué de dimension finie :

$$V_{\alpha} = V^{\otimes k_{\alpha}} \{r_{\alpha} + n_+ - 2n_-\}$$

Et on défini :

$$C^{i,j}(D) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_{\alpha} = i + n_-}} V_{\alpha}^j$$

La double graduation nous vient du fait que V_{α} est \mathbb{Z} -gradué. On peut remarquer que $C^{i,*}(D)$ est trivial pour $i = n_-, \dots, n_+$.

On peut facilement se convaincre que pour $v \in V_\alpha \subset C^{i,j}(D)$ alors :

$$\begin{aligned} i &= r_\alpha - n_- \\ j &= \text{deg}(v) + i + n_+ - n_- \end{aligned}$$

Nous allons calculer la chaîne bi-graduée $C^{*,*}(D)$ avec D un diagramme de l'entrelacs de Hopf (Figure 17):

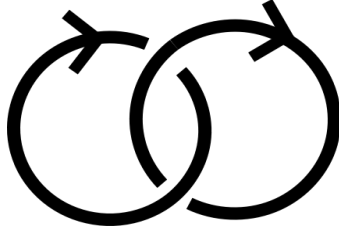


Figure 17: Un diagramme de l'entrelacs de Hopf.

En effet avec l'orientation choisie ci-dessus : $n_- = 2, n_+ = 0$. Donc par exemple, pour $\alpha = 10$ on a

$$V_{10} = V^{\otimes k_{10}}\{r_{10} + n_+ - 2n_-\} = V\{-3\}$$

On obtient ainsi :

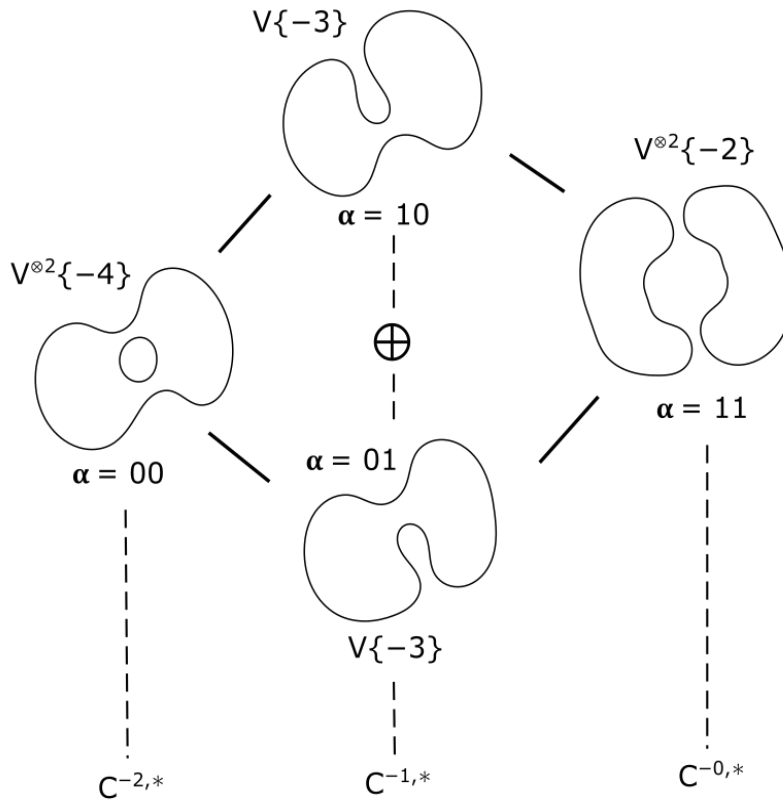


Figure 18: Chaîne bi-graduée de l'entrelacs de Hopf.

3.2 Construction des différentielles.

Il nous faut maintenant une différentielle $d^i : C^{i,*}(D) \rightarrow C^{i+1,*}(D)$ pour que $(C^{*,*}(D), d)$ soit un complexe de chaîne bi-gradué. Dans cette partie nous ne justifierons pas toutes les affirmations car nous devrions utiliser des résultats de topologie différentielle notamment sur le cobordisme, le TQFT...

Lorsque deux n-uplets, α et α' sont identiques à l'exception d'un seul chiffre à la position $m \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut les relier par une flèche. L'un, α , a donc un 0 en position m et l'autre, α' , a un 1 en position m . On note ξ la flèche qui relie ces deux n-uplet et qui part de celui qui a un 0 et qui va vers celui qui a un 1 : $\alpha \xrightarrow{\xi} \alpha'$. On note alors $Tail(\xi) := \alpha$ lorsque la flèche part de α . On va noter ξ comme les n-uplets qu'il relie mais en remplaçant le chiffre qui les distingue par une étoile. Par exemple, la flèche ξ qui relie 0101 et 0111 sera notée $\xi = 01 * 1$

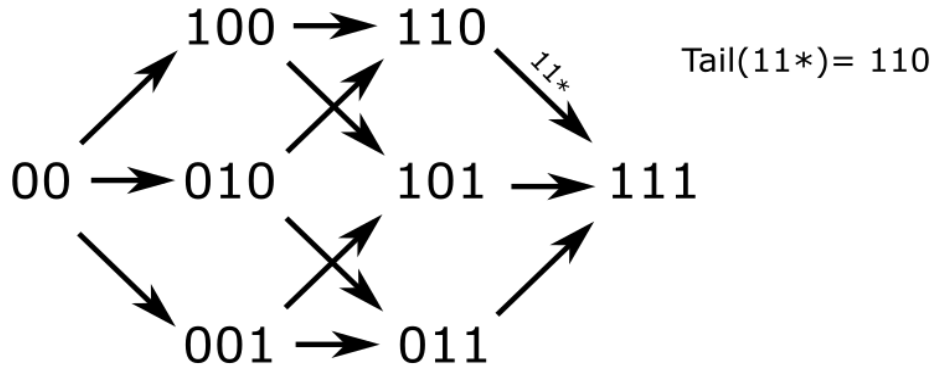


Figure 19: Exemple pour les diagrammes d'entrelacs à trois croisements

Grâce à des propriétés de cobordisme, on introduit maintenant (c.f annexe) l'application linéaire $d_\xi : V_\alpha \rightarrow V_{\alpha'}$ qui utilise les deux applications linéaires suivantes : $m : V \otimes V \rightarrow V$ et $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} m(1 \otimes 1) &= 1 & \Delta(x) &= 1 \otimes 1 \\ m(1 \otimes x) &= x & \Delta(1) &= 1 \otimes x + x \otimes 1 \\ m(x \otimes 1) &= x \\ m(x \otimes x) &= 0 \end{aligned}$$

La construction de d_ξ est détaillée en annexe. Nous sommes maintenant capable de définir d^i

Définition 3.7 $d^i : C^{i,*}(D) \rightarrow C^{i+1,*}(D)$ est l'application définie par : $\forall v \in V_\alpha \subset C^{i,*}(D)$

$$d^i(v) = \sum_{\substack{\xi \text{ tel que} \\ Tail(\xi) = \alpha}} sign(\xi) d_\xi(v)$$

où $sign(\xi) = (-1)^{\text{nombre de 1 à la gauche de * dans } \xi}$

Pour que les d^i définissent bien des différentielles, il nous faut montrer la proposition suivante :

Proposition 3.8 Pour tout entier relatif i , $d^{i+1} \circ d^i = 0$

Preuve : Soit D un diagramme d'entrelacs à n croisements. Soit $v \in V_\alpha \subset C^{i,*}(D)$ alors

$$d^i(v) = \sum_{\substack{\xi \text{ tel que} \\ \text{Tail}(\xi)=\alpha}} \text{sign}(\xi)d_\xi(v)$$

$$d^{i+1} \circ d^i(v) = \sum_{\substack{\xi, \phi \text{ tel que} \\ \text{Tail}(\xi)=\alpha \\ \text{Tail}(\phi)=\xi(\alpha)}} \text{sign}(\xi)\text{sign}(\phi)d_\phi d_\xi(v)$$

On pose $I_\alpha = \{1 \leq i \leq n \mid \alpha_i = 0\}$ avec $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$

$$\begin{aligned} d^{i+1} \circ d^i(v) &= \sum_{a,b \in I_\alpha, a \neq b} \text{sign}(a)\text{sign}(b)d_a d_b(v) \\ &= \sum_{a,b \in I_\alpha, a < b} \text{sign}(a)\text{sign}(b)d_a d_b(v) + \sum_{a,b \in I_\alpha, a > b} \text{sign}(a)\text{sign}(b)d_a d_b(v) \end{aligned}$$

Dans le calcul précédent, nous faisons un abus de notation lorsque l'on écrit b dans $\text{sign}(b)$. On devrait plutôt écrire $\text{sign}(\xi_b)$ avec $\alpha \xrightarrow{\xi_b} \alpha'$ et $\alpha' = \alpha_1\dots\alpha_{b-1}1\alpha_{b+1}\dots\alpha_n$. Idem pour a, d_a et d_b

Or, pour $a < b$, $\alpha = \underbrace{\dots 1 \dots}_k 0_a \underbrace{\dots 1 \dots}_l 0_b \dots$. Donc $\text{sign}(a) = (-1)^k$ et $\text{sign}(b) = (-1)^{k+l}$.

Et pour $a > b$, $\alpha = \underbrace{\dots 1 \dots}_k 0_b \underbrace{\dots 1 \dots}_l 0_a \dots$. Donc $\text{sign}(a) = (-1)^{k+l+1}$ et $\text{sign}(b) = (-1)^k$

Ainsi si on note $\epsilon_{a,b} = \text{sign}(a)\text{sign}(b)$ pour $a < b$:

$$\begin{aligned} d^{i+1} \circ d^i(v) &= \sum_{a,b \in I_\alpha, a < b} \epsilon_{a,b} d_a d_b(v) + \sum_{a,b \in I_\alpha, a > b} -\epsilon_{a,b} d_a d_b(v) \\ &= \sum_{a,b \in I_\alpha, a < b} \epsilon_{a,b} (d_a d_b(v) - d_b d_a(v)) \end{aligned}$$

Or par des propriétés de cobordisme on peut prouver que $d_a d_b = d_b d_a$. Donc $d^{i+1} \circ d^i = 0$

□

On a donc prouvé que $(C^{*,*}(D), d)$ était un complexe de chaîne bi-gradué. Le calcul du complexe de chaîne bi-gradué pour l'entrelacs de Holf est présenté ci-dessous :

$$0 \rightarrow C^{-2,*}(D) \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1,*}(D) \xrightarrow{d^{-1}} C^{0,*}(D) \rightarrow 0$$

De façon plus explicite :

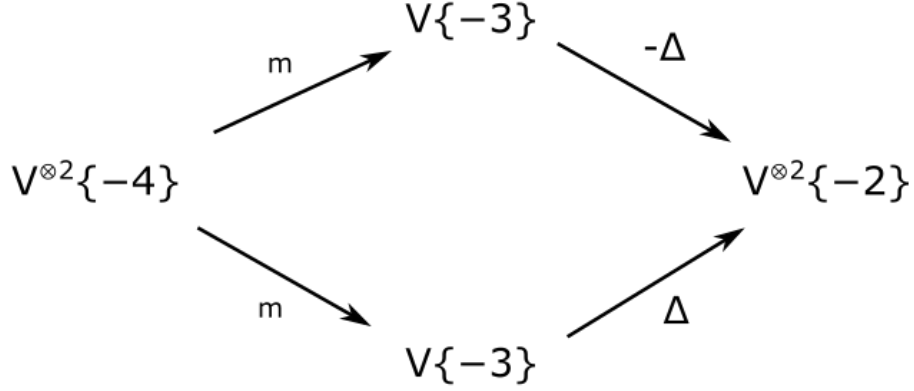


Figure 20: Calcul du complexe de chaine bi-gradué pour l'entrelacs de Holf

3.3 L'Homologie de Khovanov et la caractéristique d'Euler

Définition 3.9 L'homologie de Khovanov d'un diagramme d'entrelacs D est

$$KH^{i,*}(D) := Ker(d^i)/Im(d^{i-1})$$

Proposition 3.10 Pour un diagramme d'entrelacs D , la caractéristique d'Euler bi-gradué peut s'exprimer en fonction des qdimensions des $C^{i,*}(D)$:

$$\chi(C^{*,*}(D)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i qdim(C^{i,*}(D))$$

Proposition 3.11 La caractéristique d'Euler bi-gradué de l'homologie de Khovanov d'un diagramme d'entrelacs D est égale au pôleynome de Jones non-normalisé de ce diagramme d'entrelacs :

$$\chi(C^{*,*}(D)) = \widehat{V}(D)$$

Preuve : Soit D un diagramme d'entrelacs. Alors, $\chi(C^{*,*}(D)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i qdim(C^{i,*}(D))$ et avec les différentes propriétés de la qdimension :

$$\begin{aligned} qdim(C^{i,*}(D)) &= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} qdim(V_\alpha) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} q^{r_\alpha + n^+ - 2n_-} qdim(V)^{k_\alpha} \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} q^{r_\alpha + n^+ - 2n_-} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\chi(C^{*,*}(D)) &= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i=r_\alpha-n_-}} (-1)^i q^{r_\alpha+n_+-2n_-} (q+q^{-1})^{k_\alpha} \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} (-1)^{r_\alpha+n_-} q^{r_\alpha+n_+-2n_-} (q+q^{-1})^{k_\alpha}
\end{aligned}$$

Et d'après la remarque 2.8 , on sait que :

$$\widehat{V}(D) = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ r_\alpha = i+n_-}} (-1)^{r_\alpha+n_-} q^{r_\alpha+n_+-2n_-} (q+q^{-1})^{k_\alpha}$$

□

Nous allons présenter les calculs de l'homologie de Khovanov et sa caractéristique d'Euler pour l'entrelacs de Holf :

Pour plus de clareté on va afficher la graduation de différents \mathbb{Q} -espaces vectoriels \mathbb{Z} -gradués en dessous de ceux-ci.

$$\bullet V \otimes V = \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes x}}_{-1 + -1 = -2} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes 1}}_{-1 + 1 = 0} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes x}}_{1 + -1 = 0} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes 1}}_{1 + 1 = 2}$$

$$\text{donc, } V \otimes V\{-4\} = \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes x}}_{-6} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes 1}}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes x}}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes 1}}_{-2} = \mathbb{Q}_a \oplus \mathbb{Q}_b \oplus \mathbb{Q}_c \oplus \mathbb{Q}_d$$

$$\bullet V\{-3\} = \underbrace{\mathbb{Q}_x}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_1}_{-2}$$

$$\text{donc, } V\{-3\} \oplus V\{-3\} = \underbrace{\mathbb{Q}_x}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_1}_{-2} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_x}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_1}_{-2} = \mathbb{Q}_e \oplus \mathbb{Q}_f \oplus \mathbb{Q}_g \oplus \mathbb{Q}_h$$

$$\bullet V \otimes V\{-2\} = \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes x}}_{-4} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{x \otimes 1}}_{-2} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes x}}_{-2} \oplus \underbrace{\mathbb{Q}_{1 \otimes 1}}_0 = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_q \oplus \mathbb{Q}_r \oplus \mathbb{Q}_s$$

De plus ,

$$\begin{aligned}
d^{-2}(a) &= 0 & d^{-1}(e) &= -p \\
d^{-2}(b) &= e + g & d^{-1}(f) &= -q - r \\
d^{-2}(c) &= e + g & d^{-1}(g) &= p \\
d^{-2}(d) &= f + h & d^{-1}(h) &= q + r
\end{aligned}$$

$$\text{Par exemple, } d^{-2}(b) = e + g \text{ car } d^{-2}(b) = \underbrace{m(x \otimes 1)}_{\mathbb{Q}_e \oplus \mathbb{Q}_f} + \underbrace{m(x \otimes 1)}_{\mathbb{Q}_g \oplus \mathbb{Q}_h} = e + f$$

ainsi,

$$\{0\} \xrightarrow{d^{-3}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(a, b, c, d) \xrightarrow{d^{-2}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(e, f, g, h) \xrightarrow{d^{-1}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(p, q, r, s) \xrightarrow{d^0} \{0\}$$

et ,

$$\begin{aligned} Ker(d^{-2}) &= Vect_{\mathbb{Q}}(a, b - c) \\ Ker(d^{-1}) &= Vect_{\mathbb{Q}}(e + g, f + h) \\ Im(d^{-2}) &= Vect_{\mathbb{Q}}(e + g, f + h) \\ Im(d^{-1}) &= Vect_{\mathbb{Q}}(p, q + r) \end{aligned}$$

Donc,

$$KH^{-2,*}(\text{diagram}) = Ker(d^{-2})/Im(d^{-3}) = Vect_{\mathbb{Q}}(a, b - c) = Vect_{\mathbb{Q}}(x \otimes x, x \otimes 1 - 1 \otimes x)$$

$$KH^{-1,*}(\text{diagram}) = Ker(d^{-1})/Im(d^{-2}) = \{0\}$$

$$KH^{0,*}(\text{diagram}) = Ker(d^0)/Im(d^{-1}) = Vect_{\mathbb{Q}}(r, s) = Vect_{\mathbb{Q}}(1 \otimes x, 1 \otimes 1)$$

Calculons maintenant la caractéristique d'Euler bi-gradué de l'homologie de Khovanov du diagramme de l'entrelacs de Holf :

$$\begin{aligned} \chi(C^{*,*}(\text{diagram})) &= \sum_i (-1)^i qdim(C^{i,*}(\text{diagram})) \\ &= qdim(C^{-2,*}(\text{diagram})) - qdim(C^{-1,*}(\text{diagram})) + qdim(C^{0,*}(\text{diagram})) \\ &= q^{-6} + 2q^{-4} + q^{-2} - 2q^{-4} - 2q^{-2} + q^{-4} + 2q^{-2} + 1 \\ &= q^{-6} + q^{-4} + q^{-2} + 1 \end{aligned}$$

Or d'après la partie 2 : $V(\text{diagram}) = (-t^{-1/2} - t^{-5/2})$ et donc :

$$\widehat{V}(\text{diagram}) = \left((-t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{-1/2} - t^{-5/2}) \right)_{q=-t^{1/2}} = q^{-6} + q^{-4} + q^{-2} + 1.$$

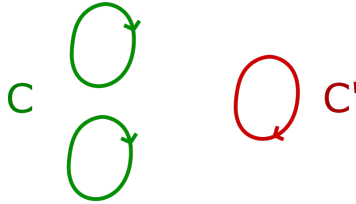
On retrouve donc bien que la caractéristique d'Euler bi-gradué de l'homologie de Khovanov du diagramme de l'entrelacs de Holf est égale au polynôme de Jones non-normalisé de celui-ci.

Remarque : L'homologie de Khovanov n'est pas un invariant complet mais elle caractérise le nœud trivial : si un entrelacs a la même homologie de Khovanov que le nœud trivial alors cet entrelacs est le nœud trivial. [Kron-Mrow]

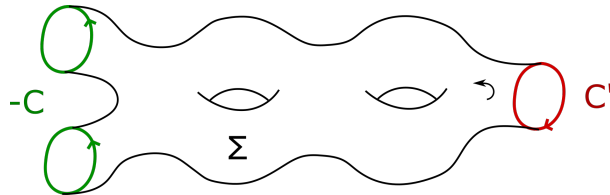
4 Annexe : construction de d_ξ

Définition 4.1 C et C' deux variétés de dimension 1 compactes orientées (c'est à dire des unions finies de cercles). Un *cobordisme de dimension 2* entre C et C' est une surface compacte orientée Σ tel que $\delta\Sigma = (-C) \sqcup C'$, où $-C$ est identique à C , avec une orientation opposée.

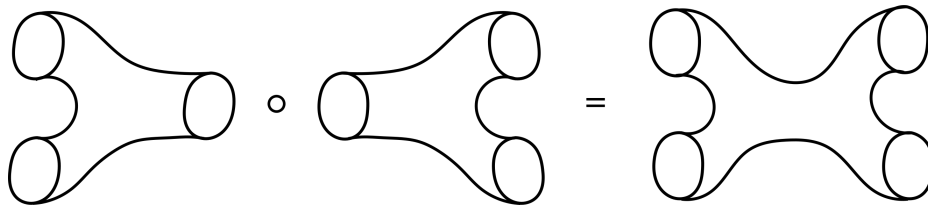
Par exemple un cobordisme entre C et C' :



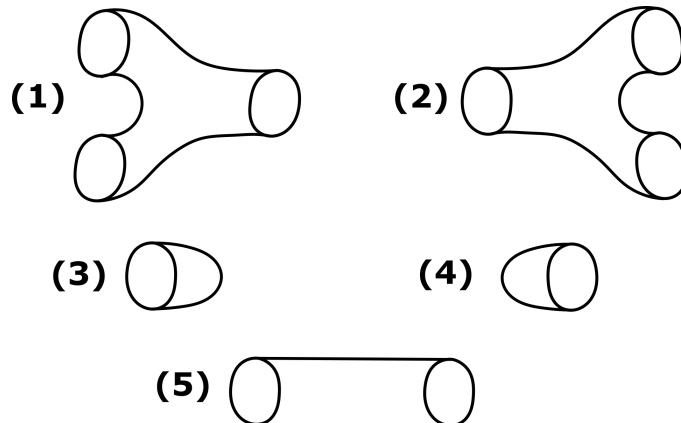
est représenté ci-dessous :



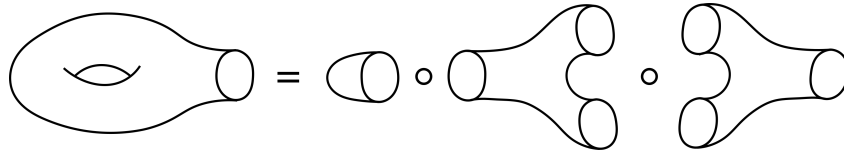
Remarque : On peut composer les cobordismes. Par exemple :



Propriété 4.2 Tout cobordisme de dimension 2 est obtenu par composition et union disjointe des cobordismes suivants :



Par exemple :



On associe à chaque cobordisme de la propriété 4.2 une application : (1) est associé avec $m : V \otimes V \rightarrow V$, (2) avec $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$, (3) avec $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{Q}$, (4) avec $u : \mathbb{Q} \rightarrow V$ et (5) avec l'identité de V dans V . On définit ces applications de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m(1 \otimes 1) &= 1 & \Delta(x) &= 1 \otimes 1 & \epsilon(1) &= 0 & u(1) &= 1 \\ m(1 \otimes x) &= x & \Delta(1) &= 1 \otimes x + x \otimes 1 & \epsilon(x) &= 1 \\ m(x \otimes 1) &= x \\ m(x \otimes x) &= 0 \end{aligned}$$

Ce résultat de la classification des surfaces est dû au fait que (V, m, δ) est une algèbre de Frobenius.

Appliquons ces concepts à notre théorie :

On rappelle que $\alpha \xrightarrow{\xi} \alpha'$ lorsque α et α' diffèrent d'un seul chiffre, et qu'à un n -uplet α , est associé un système de nœud trivial (qui correspond au dénouement du nœud en modifiant les croisements). On peut donc réaliser un cobordisme entre les systèmes de nœuds triviaux associés à α et α' . D'après la propriété 4.2, on peut décomposer le cobordisme obtenu en une composition et une union disjointe, de cobordisme de cette même propriété. Chaque cobordisme étant associé à une application, on peut donc associer au cobordisme qui relie les systèmes de nœuds triviaux associés à α et à α' , une application que l'on note d_ξ .

Exemple :

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi &= \text{Diagram of a genus-1 surface with a boundary circle and four holes on the right side} \\ &= \text{Diagram of a pair of pants with two holes} \circ \text{Diagram of a pair of pants with two holes} \circ \text{Diagram of a pair of pants} \circ \left(\text{Diagram of a cylinder} \cup \text{Diagram of a pair of pants with two holes} \right) \\ d_\xi &= \Delta \circ m \circ \Delta \circ \text{id}_V \otimes \Delta \end{aligned}$$

References

- [Sossisky] Alexei Sossinsky, Nœuds, Seuil, 1999
- [Pras-Soss] Viktor Vasil'evich Prasolov et Alexei Sossinsky, Knot, Links, Braids and 3-Manifolds, " An introduction to the New invariants in Low-Dimensional Topology", 1996
- [Lickorish] W.B. Raymond Lickorish , An introduction to knot Theory, 1991
- [Jacobs] Kayla Jacobs, Tricolorability of Knots, 2006
- [Turner] Paul Turner, Five Lectures on Khovanov Homology, 2006
- [Bar-Natan] Dror Bar-Natan, On Khovanov's categorification of the Jones polynomial, 2002
- [Khovanov] Mikhail Khovanov, A categorification of the Jones polynomial, 2000
- [Kron-Mrow] P.B. Kronheimer, T.S. Mrowka, Khovanov homology is an unknot-detector, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (113), 2011, pp. 97-208