

Théorie des noeuds :

Introduction et Polynôme de Jones

Rapport de stage écrit par Lucas Toury
dirigé par Michael Heusener
année universitaire 2021-2022

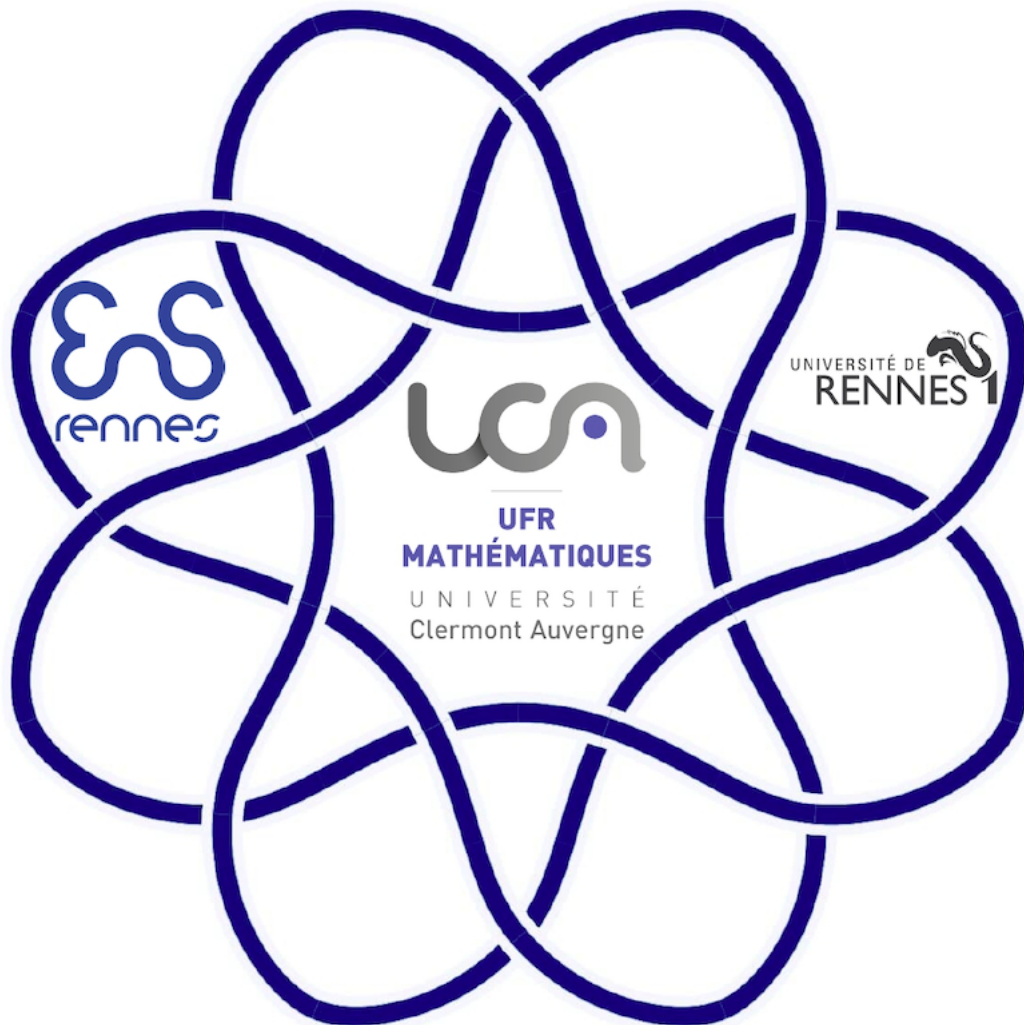


Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Approche intuitive	1
1.2	Approche analytique	1
1.3	Approche combinatoire	2
2	Définitions et petits résultats	7
2.1	Symétries topologiques	7
2.2	Entrelacs	8
2.3	Projections d'un noeud	9
3	Mouvements de Reidemeister	9
4	Invariants de noeuds simples	11
4.1	Coefficient d'entrelacement	11
4.2	Ordre d'un noeud	12
4.3	Tricolorabilité	13
4.4	Surfaces de Seifert	17
5	Arithmétique des noeuds	19
6	Le polynôme de Jones	22
6.1	Construction du polynôme de Jones par le crochet de Kauffman	22
6.2	Propriétés du polynôme de Jones et applications	26
7	Homologie de Khovanov	26
7.1	Définition des espaces gradués	27
7.2	Définition de la différentielle	30

1 Introduction

1.1 Approche intuitive

La théorie des noeuds est une théorie mathématique qui est une branche de la topologie et a pour avantage de s'inspirer du réel. Il s'agit en effet de l'étude des noeuds comme on l'entend couramment. Pour que le concept soit mieux défini et puisse être utilisé, dans cette théorie après avoir réalisé notre noeud sur une corde, on prend les deux bouts et on les colle, de sorte que le noeud ne puisse plus se défaire de manière triviale. Les grands axes de cette théorie consistent en les questions suivantes : Quand est-ce que deux noeuds sont en réalité les mêmes ? C'est-à-dire en les manipulant dans l'espace arriver à passer de l'un à l'autre. Et quand est-ce qu'un noeud est en réalité le non-noeud, c'est-à-dire un simple cercle.

Pour arriver à répondre à ces questions un grand aspect pratique de la théorie consiste à créer des invariants de noeuds. Cela consiste à associer à chaque noeud une quantité (booléen, matrice, polynôme...) de sorte que si deux noeuds sont les mêmes alors on leur associe la même quantité. En pratique c'est plutôt la contraposée de cette proposition qui est utilisée, c'est-à-dire que si deux noeuds n'ont pas la même quantité alors ces noeuds sont différents.

Le but de ce rapport est d'établir plusieurs invariants de noeuds dont celui qui tiendra un rôle principal ici, à savoir le polynôme de Jones.

1.2 Approche analytique

Définition 1.1. On appelle noeud toute application continue et injective de S^1 dans \mathbb{R}^3 .

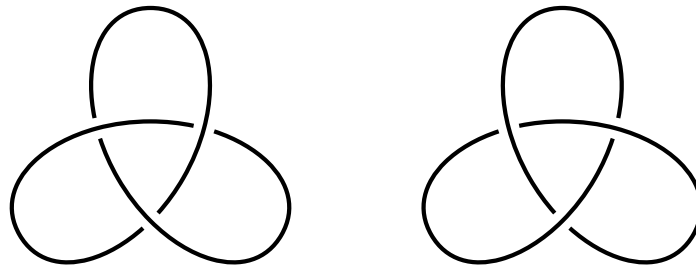


FIGURE 1 – noeud de trèfle droit et gauche

Définition 1.2. Une isotopie ambiante entre deux noeuds K et K' est une application continue

$$h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) \rightarrow h_t(x)$$

telle que $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$, $h_1(K) = K'$ et h_t un est homéomorphisme de \mathbb{R}^3 pour tout t . Si K et K' sont orientés on demande de plus que h_1 respecte l'orientation.

Remarque 1.1. Il est important de noter le fait que h_t est un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 et non simplement du noeud. En effet cette définition permet de prendre en compte "l'air" qu'il y a entre les brins du noeud. Si ce n'était pas le cas en serrant assez fort le noeud, ce dernier serait

de plus en plus petit puis finirait par disparaître, et tout ça de manière continue! C'est une chose que l'on veut éviter.

Remarque 1.2. On définit les noeuds par le biais d'une application mais en réalité dans la suite, on confond cette application avec son image dans \mathbb{R}^3 .

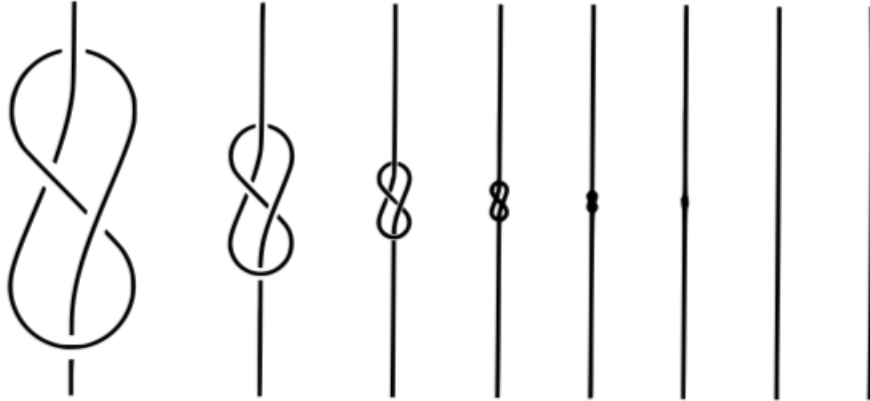


FIGURE 2 – Dispiration d'un noeud de manière continue

Remarque 1.3. L'isotopie ambiante est la transformation qui permet de dire que deux noeuds sont les mêmes, on dit alors qu'ils sont équivalents. Si l'isotopie ambiante ne respecte pas l'orientation on dit que les deux noeuds sont semblables.

Exemple 1.1. Le noeud de trèfle droit et gauche sont évidemment semblables grâce à une symétrie plane mais sont-ils équivalents?

L'équivalence de deux noeuds est évidemment une relation d'équivalence et dans la suite ce que nous appellerons "noeud" correspond en réalité à la classe d'équivalence de ce dernier.

1.3 Approche combinatoire

Définition 1.3. On appelle noeud polygonal une ligne polygonal simple fermée dans \mathbb{R}^3 .

Remarque 1.4. Il est légitime de se demander si cette définition des noeuds, qui nous le verrons par la suite est beaucoup plus maniable pour savoir si deux noeuds sont les mêmes, est équivalente à la définition donnée précédemment. C'est souvent le cas sauf pour certains noeuds appelés noeuds sauvages mais dont nous ne nous soucierons pas ici. Leur étude est aujourd'hui encore très mal comprise. Ainsi la suite de ce document porte sur les noeuds appelés polygonaux mais que nous nommerons simplement noeud dans la suite.

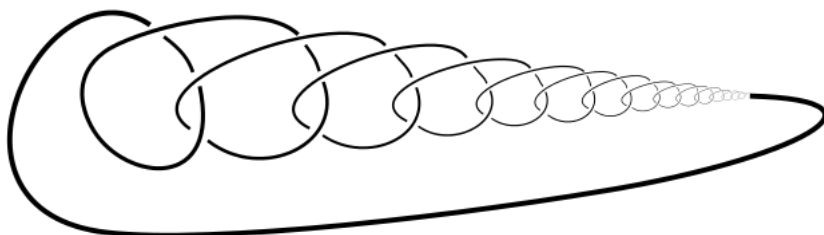


FIGURE 3 – Exemple de noeud sauvage

Le noeud ci-dessus est constitué d'une infinité de noeuds de trèfle. On peut montrer que ce noeud est bien continue est qu'il est en effet fermé. Le point qui semble à première vu poser problème est appelé un point singulier. On peut alors se poser la question de savoir si les noeuds sauvages sont une exception et si ils sont courants ou non. Malheureusement pour nous, J. Milnor a montré que en un sens, presque tout les noeuds sont sauvages.

Il semblerait en revanche qu'avec une légère condition de régularité on puisse retrouver des noeuds apprivoisés. C'est le résultat suivant qui nous l'affirme.

Théorème 1.4. *Tout noeud différentiable est polygonal.*

Démonstration. Considérons K un noeud dans \mathbb{R}^3 donné comme l'image d'une fonction différentiable périodique à valeurs vectorielles $p(s) = (x(s), y(s), z(s))$ de longueur d'arc s dont la dérivée $p'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ existe et est continue pour tout s . La période l est la longueur de K

Si p_1 et p_2 sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 l'angle entre eux est donné par :

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \cos^{-1} \frac{p_1 \cdot p_2}{\|p_1\| \|p_2\|}.$$

Considérons trois réels s_0, s_1, s_2 qui satisfont $s_0 \leq s_1 < s_2$

De

$$\int_{s_1}^{s_2} p'(u) du = \int_{s_1}^{s_2} p'(s_0) du + \int_{s_1}^{s_2} (p'(u) - p'(s_0)) du$$

s'ensuit

$$p(s_2) - p(s_1) = (s_2 - s_1)(p'(s_0) + Q), \tag{1}$$

où

$$Q = \frac{1}{s_1 - s_2} \int_{s_1}^{s_2} (p'(u) - p'(s_0)) du.$$

Puisque la paramétrisation est faite par rapport à la longueur de l'arc

On a,

$$|1 - \|Q\|| \leq \|p'(s_0) + Q\| \leq 1 + \|Q\|,$$

et donc,

$$\|p'(s_0) + Q\| = 1 + q$$

pour un nombre q qui satisfait $|q| \leq \|Q\|$. Finalement,

$$\|p(s_2) - p(s_1)\| = (s_2 - s_1)(1 + q). \tag{2}$$

Choisissons un $\epsilon \leq \frac{1}{2}$. Puisque la dérivée $p'(s)$ est continue et est même uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $|s - s'| < \delta$ alors $\|p'(s) - p'(s')\| < \epsilon$. En conséquence, on impose la restriction $s_2 - s_0 < \delta$.

S'ensuit

$$(s_2 - s_1)\|Q\| = \left\| \int_{s_1}^{s_2} (p'(u) - p'(s_0)) du \right\| \leq (s_2 - s_1)\epsilon,$$

et

$$|q| \leq \|Q\| \leq \epsilon. \tag{3}$$

En divisant (1) par (2), on obtient

$$\frac{p(s_2) - p(s_1)}{\|p(s_2) - p(s_1)\|} = p'(s_0) + P, \tag{4}$$

où

$$P = \frac{Q - qp'(s_0)}{1 + q}.$$

Puisque $q \geq -\epsilon \geq -\frac{1}{2}$, nous avons $\frac{1}{1+q} \leq 2$. Donc,

$$\|P\| \leq 2\|Q - qp'(s_0)\| \leq 2(\|Q\| + |q|) \leq 4\epsilon. \quad (5)$$

Nous pouvons donner deux conclusions des équations du paragraphe précédent. La première est un corollaire immédiat de (2) et (3), qui est

Lemme 1.5. Le rapport entre la longueur de la corde et la longueur de l'arc le long de K se rapproche de 1 lorsque ce dernier se rapproche de 0.

La deuxième conclusion qui est l'élément principal pour prouver le caractère apprivoisé de K est

Lemme 1.6. Pour tout angle $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ de sorte que pour tout s, s', u, u' dans un intervalle de longueur δ et tels que $s < s'$ et $u < u'$,

$$\langle (p(s') - p(s), p(u') - p(u)) \rangle < \alpha.$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence de (4) et (5). On note

$$s_0 = \min\{s, s', u, u'\},$$

s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{p(s') - p(s)}{\|p(s') - p(s)\|} &= p'(s_0) + P, & \|P\| &\leq 4\epsilon, \\ \frac{p(u') - p(u)}{\|p(u') - p(u)\|} &= p'(s_0) + P', & \|P'\| &\leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{p(s') - p(s)}{\|p(s') - p(s)\|} \cdot \frac{p(u') - p(u)}{\|p(u') - p(u)\|} = 1 + \bar{q},$$

où

$$\bar{q} = p'(s_0) \cdot (P + P') + P \cdot P'.$$

En conséquence,

$$|\bar{q}| \leq \|P\| + \|P'\| + \|P\|\|P'\| \leq 8\epsilon + 16\epsilon^2,$$

qui peut être rendu arbitrairement petit. Finalement, $\cos \langle (p(s') - p(s), p(u') - p(u)) \rangle$ peut être rendu arbitrairement proche de 1, et le lemme en découle. \square

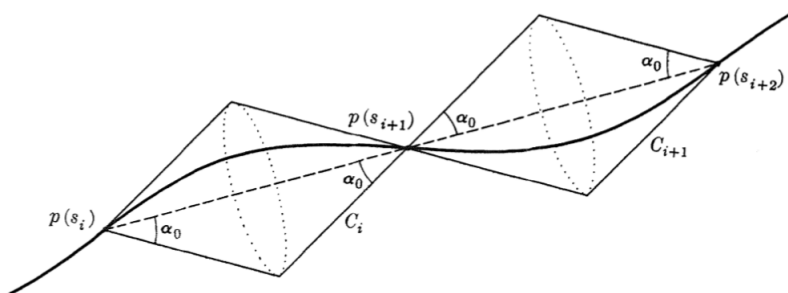
Nous allons nous pencher sur l'argument principal pour dire que K est apprivoisé. On prend deux points $p, p' \in K$, $\text{arc}(p, p')$ est l'arc de longueur la plus courte entre eux le long de K . Noter que si $|s - s'| \leq l/2$, où l est la longueur total du noeud, alors $\text{arc}(p(s), p(s')) = |s - s'|$. On considère la fonction $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(p, p') = \begin{cases} \|p - p'\| / \text{arc}(p, p'), & p \neq p', \\ 1, & p = p'. \end{cases}$$

On a montré que le rapport entre la longueur de la corde et la longueur de l'arc se rapproche de 1 lorsque ce dernier se rapproche de 0. Par conséquent, f est continue. Puisqu'elle est positive et que son domaine est compact, elle atteint un minimum positif m . Alors,

$$\|p - p'\| \geq m \operatorname{arc}(p, p'), \quad p, p' \in K. \quad (6)$$

Nous prenons maintenant un angle positif $\alpha_0 < \pi/4$ tel que $\tan(\alpha_0) < m/2$. Pour cet angle α_0 , on choisit un δ en accord avec le lemme précédent. Soit n un entier naturel assez grand pour que $l/n < \delta/2$, et des réels $\{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ tels que $s_{i+1} - s_i = l/n$. Notons que $p(s_i) = p(s_j)$ si et seulement si $i \equiv j \pmod{n}$, donc l'ensemble $\{p(s_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ représente exactement n points du noeud. Pour chaque s_i , on forme le double cône C_i , d'angle de sommet α_0 dont l'axe est la corde joignant $p(s_i)$ et $p(s_{i+1})$ (voir figure).



Les 4 propositions suivantes sont des corollaires de (6) et du lemme.

Propriété 1.7. Des cônes adjacents s'intersectent uniquement en leur sommet commun.

Démonstration. Puisque $s_{i+2} - s_i = (s_{i+2} - s_{i+1}) + (s_{i+1} - s_i) < \delta$ il s'ensuit que l'angle aigu entre les axes des cônes C_i et C_{i+1} est plus petit que α_0 qui est à son tour plus petit que $\pi/4$. L'angle du sommet du cône est α_0 . Ainsi, il n'y a aucune chance d'intersection à part en le sommet. \square

Propriété 1.8. Si $s_i \geq s \geq s_{i+1}$, alors $p(s) \in C_i$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} &< (p(s) - p(s_i), p(s_{i+1}) - p(s_i)) < \alpha_0, \\ &< (p(s_{i+1}) - p(s), p(s_{i+1}) - p(s_i)) < \alpha_0, \end{aligned}$$

la propriété suit immédiatement. \square

Propriété 1.9. Pour chaque section perpendiculaire D d'un cône C_i , il y existe un unique s dans l'intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ tel que $p(s) \in D$.

Démonstration. L'existence d'un tel s vient de la proposition précédente et de la continuité de la fonction p . Pour l'unicité, on suppose que $s_i \leq s < s' \leq s_{i+1}$ et que $p(s)$ et $p(s')$ se trouvent sur le même plan perpendiculaire à l'axe de C_i . Alors l'angle $< (p(s') - p(s), p(s_{i+1}) - p(s_i))$ doit, d'un côté, être égal à $\pi/2$ et, d'un autre côté, être plus petit que α_0 . Contradiction. \square

Propriété 1.10. Deux cônes non adjacents sont disjoints.

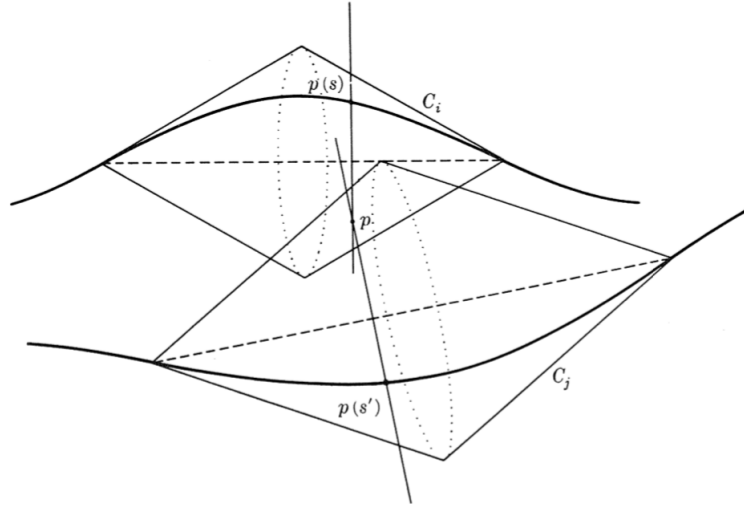
Démonstration. Supposons le contraire, i.e., on suppose qu'il existe des cônes non adjacents C_i et C_j et un point p dans leur intersection (voir figure). Soit $p(s)$ le point avec $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ dans le plan qui contient p et qui est normal à l'axe de C_i . On considère le point analogue pour C_j qui est $p(s')$. Alors,

$$\|p(s) - p\| \leq \left(\frac{l}{n}\right) \tan(\alpha_0),$$

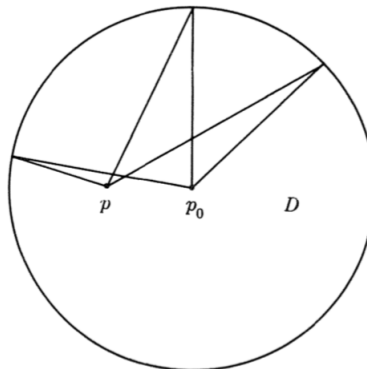
et la même inégalité s'obtient pour $p(s')$. Puisque C_i et C_j ne sont pas adjacents le long de K , nous savons que $\frac{l}{n} \leq \text{arc}(p(s), p(s'))$. Ainsi,

$$\|p(s) - p(s')\| \leq 2 \text{arc}(p(s), p(s')) \tan(\alpha_0) < m \text{arc}(p(s), p(s')).$$

Cela contredit (6), et la proposition est prouvée. \square



La preuve que K est apprivoisé est presque finie. Il suffit simplement de vérifier que, pour chaque double cône C_i , il existe un homéomorphisme h_i de C_i sur lui-même qui est l'identité sur la frontière et qui applique $K \cap C_i$ sur l'axe. Grâce à 1.8 et 1.9, la construction d'une telle application n'est pas dure. On considère arbitrairement un disque fermé D de centre p_0 . On inclut la possibilité que D soit dégénéré, soit $D = \{p_0\}$. Pour chaque point intérieur p de D , une application $g_{D,p} : D \rightarrow D$ est définie en faisant correspondre tout rayon joignant p à un point q sur la circonférence de D linéairement sur le rayon joignant p_0 à q tel que $p \rightarrow p_0$ et $q \rightarrow q$, (voir figure).



C'est évident que $g_{D,p}$ est un homéomorphisme de D sur lui-même qui laisse sa circonférence fixée et applique p sur p_0 . De plus, $g_{D,p}(p')$ est simultanément continue en p et p' . Retournons au double cône, on considère un point $p \in C_i$. Soit $p(s)$ l'intersection du noeud K avec le plan contenant p et normal à l'axe de C_i . Ce plan intersecte C_i en un disque (dégénéré dans les deux points extrêmes) que nous notons D_s . L'homéomorphisme désiré h_i est définie par

$$h_i(p) = g_{D_s,p(s)}(p).$$

L'existence et l'unicité de $p(s)$ comme un point intérieur de D_s est une conséquence de 1.9 et de la preuve de 1.8. La dernière étape est l'extension de h_i en une seule application h de \mathbb{R}^3 sur lui-même qui est définie par

$$h(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \notin \bigcup_i C_i, \\ h_i(p), & \text{si } p \in C_i. \end{cases}$$

Un tel h définit bien un homéomorphisme grâce à 1.7 et 1.10 et prouve aussi que les homéomorphismes h_i sont l'identité sur la frontière des cônes. On conclut que le noeud K est apprivoisé. \square

2 Définitions et petits résultats

2.1 Symétries topologiques

Jusqu'à présent nous avons uniquement considéré des noeuds non-orientés, mais il est possible d'orienter un noeud en l'annotant d'une flèche indiquant un sens de parcours du noeud.

Définition 2.1. Si K est un noeud orienté alors le noeud d'orientation opposée noté $-K$ est appelé l'*envers* de K .

Définition 2.2. Soit K un noeud et r l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (-x, -y, -z). \end{aligned}$$

$r(K)$, noté K^* est appelé *image miroir* du noeud K .

Remarque 2.1. Le noeud miroir est simplement le noeud obtenu en inversant tous les croisements du noeud.

Définition 2.3. On dit qu'un noeud K est un noeud *miroir* si il est équivalent à K^* .

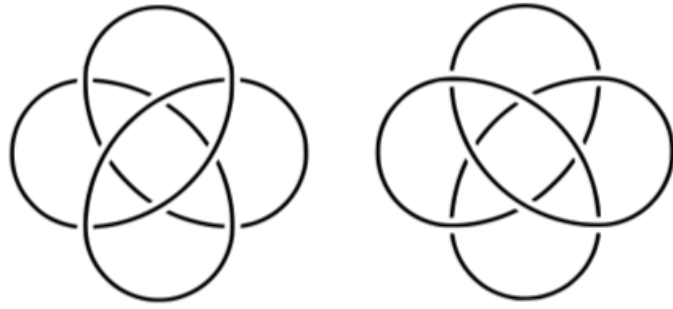


FIGURE 4 – Le noeud de huit est un noeud miroir

Remarque 2.2. Comme on peut le remarquer dans le début du document, le noeud de trèfle droit et gauche sont miroir l'un de l'autre et on leur donne des noms différents. On peut donc penser que ces deux noeuds sont différents. C'est en effet ce que nous montrerons dans la suite.

2.2 Entrelacs

Définition 2.4. Un *entrelacs* est une union disjointe de noeuds. Chaque noeud est appelé *composante* de l'entrelacs. Le nombre de composante d'un entrelac est appelé *multiplicité* de l'entrelacs.

Remarque 2.3. Un noeud est simplement un entrelacs à une seule composante.

Remarque 2.4. On définit de la même manière que pour les noeuds, l'équivalence entre deux entrelacs, l'orientation de ce dernier en orientant chacune de ses composantes, l'envers ainsi que l'entrelacs miroir.

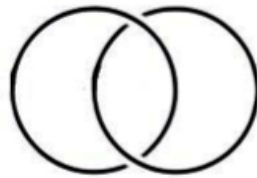


FIGURE 5 – Entrelacs de Hopf

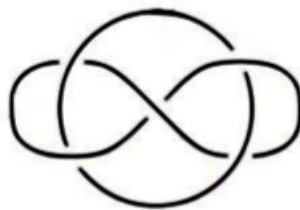


FIGURE 6 – Entrelacs de Whitehead

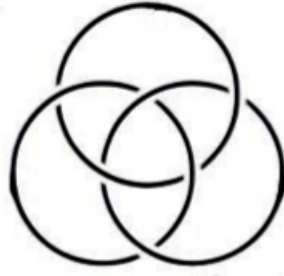


FIGURE 7 – Anneaux de Borromée

2.3 Projections d'un noeud

Les noeuds sont des objets qui vivent dans un espace en 3 dimensions, or pour les étudier nous avons besoin de les visualiser et donc de pouvoir les représenter sur un plan. C'est ce que nous avons fait jusqu'à présent pour dessiner les noeuds.

Mais projeter notre noeud sur un plan n'est pas si évident à faire et on doit imposer plusieurs règles pour que la projection soit convenable.

Définition 2.5. Une projection de noeud est dite *régulière* si à aucun moment trois points ne sont projetés sur le même point et aucun sommet ne coïncide avec aucun autre point du noeud. De plus si on indique sur la projection quel brin passe en dessous de l'autre on appelle le résultat obtenu un diagramme de noeud.

La question cruciale est de savoir si il est toujours possible de trouver une projection régulière pour un noeud. La réponse est oui et c'est le sens du théorème qui va suivre, mais on ne donnera pas de démonstration de ce dernier car cela n'apporte pas beaucoup à notre étude.

Théorème 2.6. *L'ensemble des projections régulières d'un noeud est un ouvert dense.*

On peut voir une projection comme si on regardait l'ombre du noeud sur un mur que l'on éclaire avec une lampe. Ce théorème signifie que lorsqu'on a une projection régulière on peut déplacer un peu la lampe dans toutes les directions et la projection restera régulière et que si on a une projection non régulière alors on peut effectuer un déplacement aussi petit que l'on veut dans une direction bien choisie et la projection deviendra régulière.

3 Mouvements de Reidemeister

On peut se demander dorénavant si le fait d'avoir projeter les noeuds sur un plan permet de simplifier le problème de savoir si deux noeuds sont équivalents.

Définition 3.1. Soit N un noeud, a et b deux sommets consécutifs de N . Les deux opérations suivantes sont appelées des *isotopies élémentaires* :

1. Soit p un point de \mathbb{R}^3 choisi de telle sorte que le triangle apb ne rencontre N qu'en l'arête ab . On définit un autre noeud N' en remplaçant l'arête ab par $ap \cup pb$. Notons que cette opération est permise même si le triangle apb est dégénéré, pourvu que p appartienne à l'arête ab .
2. C'est l'opération inverse de la précédente. Soient a, b et c trois sommets consécutifs du

noeud N tels que le triangle abc ne rencontre N qu'en $ab \cup bc$. On remplace la réunion $ab \cup bc$ par ac .

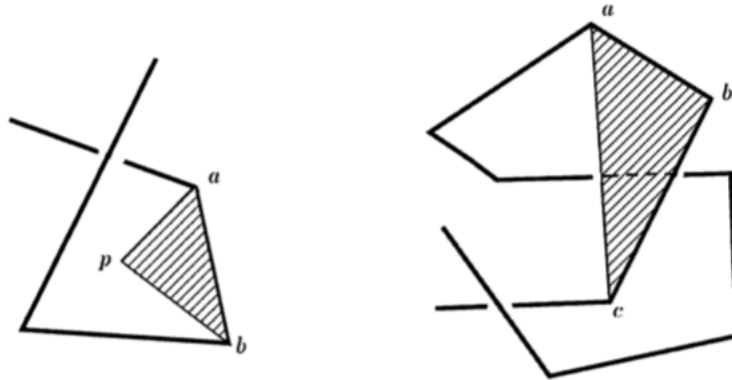


FIGURE 8 – Isotopies élémentaires

Définition 3.2. Deux noeuds sont dits *isotopes* s'ils se déduisent l'un de l'autre par une suite finie d'isotopies élémentaires.

Le théorème suivant dû à K. Reidemeister sera donné sans démonstration mais représente un point clé pour avancer dans notre étude.

Théorème 3.3. *Deux noeuds sont équivalents si et seulement si ils sont isotopes.*

Remarque 3.1. Autrement dit, ce théorème dit que deux noeuds sont les mêmes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre avec les deux transformations que l'on vient d'énoncer plus haut.

Pour l'instant on ne s'est toujours pas servi des diagrammes de noeuds, car les isotopies élémentaires ont encore lieu dans l'espace.

Mais cela a permis à Reidemeister d'introduire les trois mouvements suivants sur les diagrammes des noeuds appelés mouvements de Reidemeister :

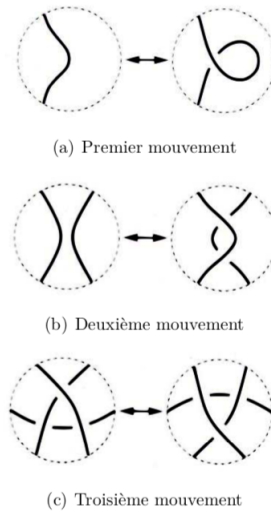


FIGURE 9 – Les trois mouvements de Reidemeister

Théorème 3.4. *Deux noeuds sont isotopes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.*

Remarque 3.2. Il existe plusieurs preuves de ce théorème dont une très géométrique que l'on peut retrouver dans [MAN04] qui consiste à réussir à refaire les isotopies élémentaires à l'aide des mouvements de Reidemeister.

Il y a dans ce même ouvrage une section dédiée à l'indépendance des mouvements de Reidemeister montrant que chacun des trois mouvements est essentiel.

On a cette fois une vraie avancée car alors deux noeuds sont équivalents si et seulement si on peut passer d'un diagramme à l'autre par une suite finie de mouvements.

Remarque 3.3. Même si cela représente une avancée en terme de facilité de manipulation des noeuds, ça ne permet pas en pratique de décider si deux noeuds sont équivalents ou non. En effet on ne sait pas quels mouvements effectuer et si les deux noeuds sont différents alors un algorithme qui essaye des mouvements aléatoirement ne finirait jamais.

4 Invariants de noeuds simples

Passons maintenant à quelques invariants de noeuds qui représente le cœur de la théorie.

4.1 Coefficient d'entrelacement

Il s'agit pour commencer d'un des invariants les plus simples que l'on va considérer sur des entrelacs de deux composantes uniquement.

On considère un entrelacs L composé de deux composantes A et B ainsi que son diagramme de noeud D . On considère tous les endroits où dans D , A passe au-dessus de B . Il y a deux cas de figure possibles.

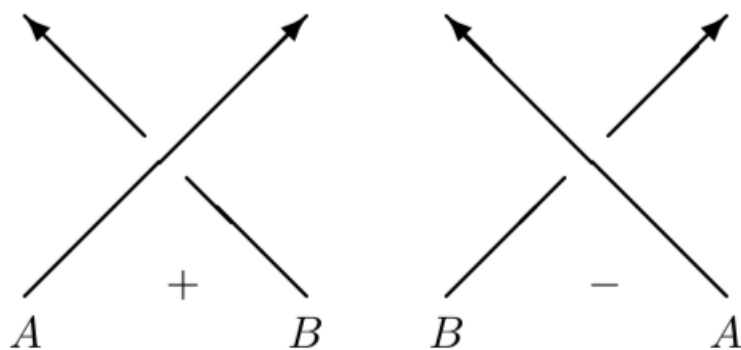


FIGURE 10 – Les deux cas de figures de croisements

Le croisement de gauche est appelé croisement de type positif et l'autre négatif. Pour chaque croisement positif on associe le nombre $(+1)$ et (-1) pour les négatifs. On somme ces nombres pour tous les croisements où A passe au-dessus de B et on obtient le coefficient d'entrelacement.

Théorème 4.1. *Le coefficient d'entrelacement est un invariant.*

Démonstration. Pour prouver cela il suffit de remarquer que le coefficient d'entrelacement ne change pas lorsqu'on effectue les mouvements de Reidemeister. \square

Remarque 4.1. C'est un invariant très simple mais il permet par exemple de démontrer que l'entrelacs de Hopf est différent de l'entrelacs trivial à deux composantes. En effet celui de Hopf a un coefficient de $(+1)$ ou (-1) selon l'orientation alors que pour le trivial, il vaut zéro.

4.2 Ordre d'un noeud

Définition 4.2. On considère toutes les projections régulières d'un noeud. Parmi celles-ci, il en existe une ou plusieurs ayant un nombre minimal de croisements. Ce nombre minimum de croisements est appelé *ordre* du noeud.

L'ordre d'un noeud est évidemment un invariant de noeud car il considère toutes les projections régulières de ce dernier. On a donc que l'ordre du noeud ne dépend pas du diagramme du noeud considéré au départ.

Remarque 4.2. Dans la pratique on ne sait pas trouver avec un diagramme de noeud l'ordre du noeud, sauf pour des cas bien particuliers. On pourra par exemple penser aux noeuds dits alternés et aux conjectures de Tait. Mais dans la pratique l'ordre d'un noeud ne permet donc pas de distinguer deux noeuds. En revanche grâce à ce dernier on peut tenter une classification des noeuds en leur donnant leur ordre pour numéro puis un autre numéro en indice.

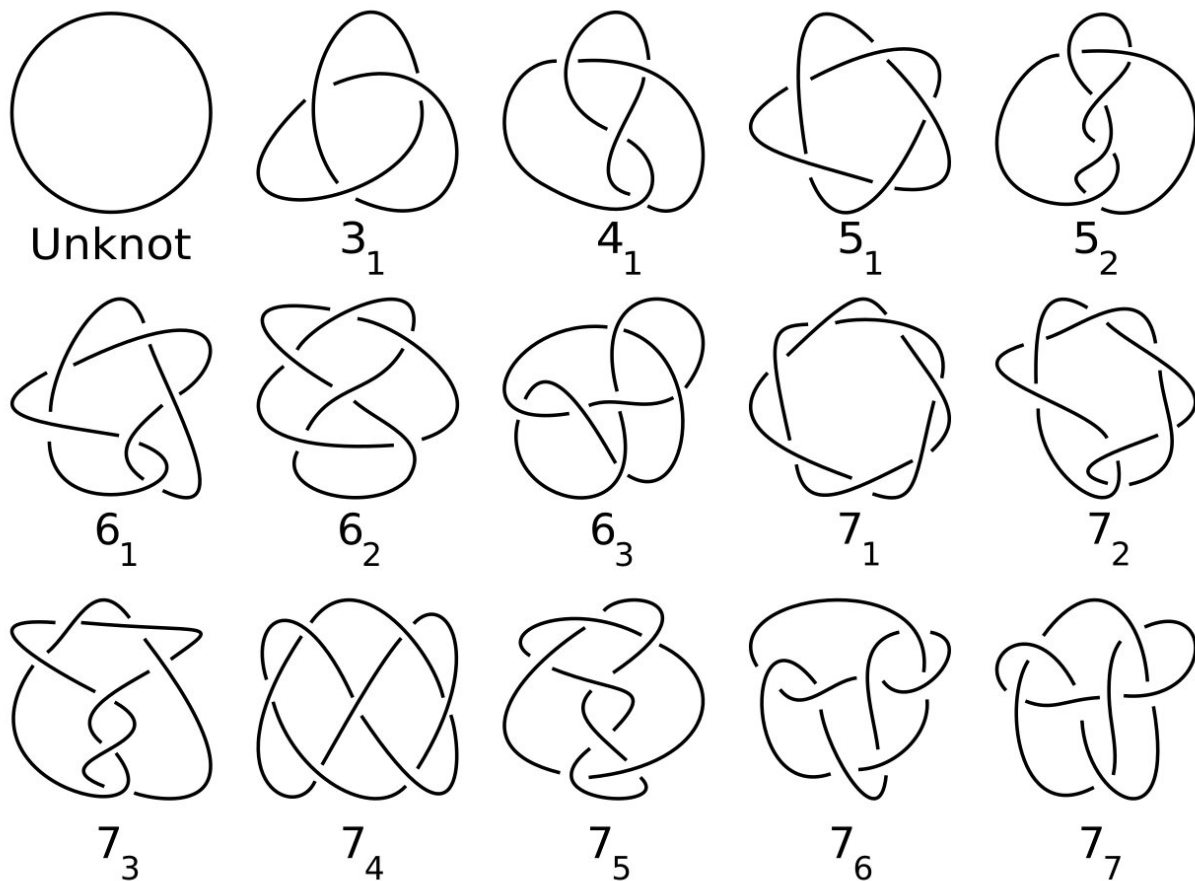


FIGURE 11 – Table des noeuds premiers à 7 croisements ou moins

4.3 Tricolorabilité

Voici l'exemple d'un invariant simple et connu depuis longtemps. Il s'avère en réalité que cet invariant de noeuds est en lien avec d'autres, en particulier le polynôme d'Alexander qui le contient.

Le principe de cet invariant est de compter les manières de colorier un noeud ou plutôt un diagramme de noeud avec 3 couleurs différentes. Or ce coloriage suit des règles bien précises.

Définition 4.3. La méthode des 3-coloriages de Fox consiste à passer avec un pinceau sur le diagramme en suivant les règles suivantes :

- 1) On ne peut changer de couleur que lors d'un croisement par en-dessous, donc pas le long d'une ligne.
- 2) À chaque croisement on doit, soit voir les trois couleurs, soit une seule couleur.
(voir figure)

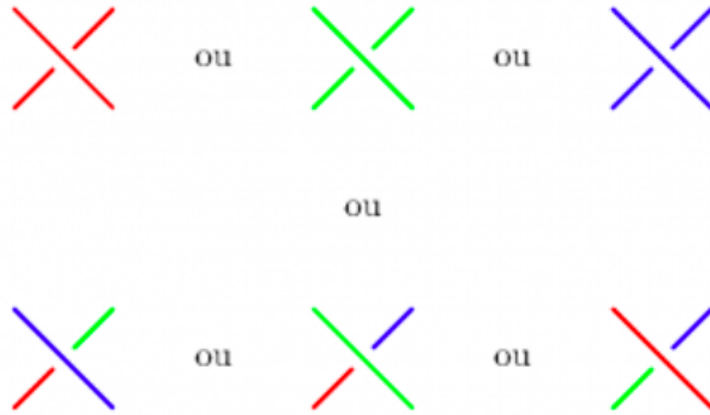


FIGURE 12 – Règles de coloriage pour les croisements

On associe alors à chaque diagramme D le nombre $F_3(D)$ de 3-coloriage de ce dernier.

Théorème 4.4. *Le nombre $F_3(D)$ de 3-coloriages d'un diagramme D est un invariant du noeud sous-jacent.*

Démonstration. Seulement un plan de la démonstration de ce théorème sera donné ici, car la démonstration n'est pas dure mais consiste simplement en une disjonction de cas. Elle repose sur le théorème de Reidemeister. Il suffit de prendre chacun des trois mouvements et vérifier que si on se donne un coloriage valide et que l'on réalise un mouvement cela impose un unique coloriage pour le nouveau diagramme obtenu, et ne pas oublier de montrer cela dans les deux sens des mouvements de Reidemeister. \square

Remarque 4.3. En réalité la preuve fonctionne car dans les faits c'est plutôt dans l'autre sens que l'on a construit l'invariant. En effet les règles de coloriage ont été choisies pour que le nombre de coloriage soit invariant par les mouvements de Reidemeister.

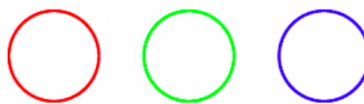


FIGURE 13 – Les 3-coloriages du noeud trivial

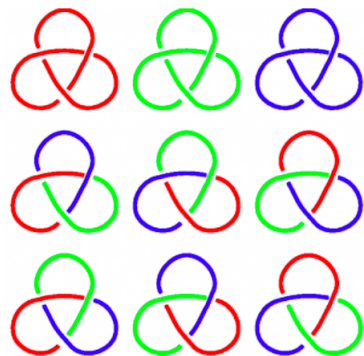


FIGURE 14 – Les 3-coloriages du noeud de trèfle

Remarque 4.4. Soit D_1 le diagramme du noeud trivial et D_2 celui du noeud de trèfle. On voit donc que $F_3(D_1) = 3$ et que $F_3(D_2) = 9$. De part le caractère invariant du nombre de 3-coloriage on peut donc affirmer que le noeud de trèfle et le noeud trivial sont différents, ou autrement dit, le noeud de trèfle ne se dénoue pas.

On peut voir en revanche qu'il n'y a pas de notion d'orientation dans cet invariant. Il est donc incapable de nous renseigner pour savoir si un noeud est miroir ou non.

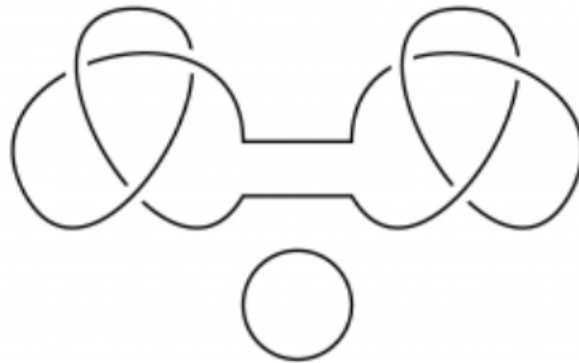
Néanmoins, grâce à cet invariant on peut prouver qu'il existe une infinité de noeuds deux à deux non-équivalents. Cela utilise l'opération de composition et propose surtout une jolie preuve.

Théorème 4.5. Soient K_1 et K_2 deux noeuds. Alors

$$3 F_3(K_1 \# K_2) = F_3(K_1) \times F_3(K_2).$$

Remarque 4.5. Pour comprendre la notation $\#$, se rapporter à la section 5 : Arithmétique des noeuds.

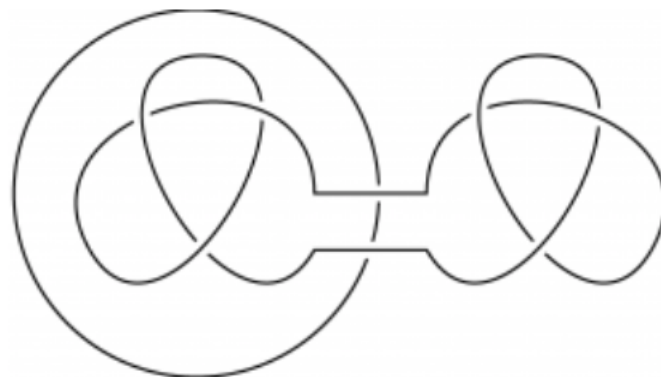
Démonstration. Au lieu de considérer $K_1 \# K_2$ on va étudier un objet plus compliqué à savoir $K_1 \# K_2 \sqcup U$ où U représente le noeud trivial. On considère donc le diagramme suivant



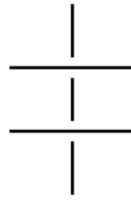
Il est évident que l'on peut colorier $K_1 \# K_2$ et U indépendamment, donc

$$F_3(K_1 \# K_2 \sqcup U) = F_3(K_1 \# K_2) \times F_3(U) = 3 F_3(K_1 \# K_2)$$

On considère maintenant un diagramme équivalent en agrandissant U et en le faisant passer derrière.



On va s'intéresser aux croisements du milieu et aux manières de le colorier.



On voit déjà que les deux extrémités de la partie verticale doivent être de la même couleur car reliées par l'extérieur par le noeud trivial. Admettons que l'on impose la couleur rouge à cette partie, alors les 3 seuls coloriages possibles sont les suivants :



On remarque que à chaque fois les lignes horizontales sont de la même couleur. Et si on regarde l'inverse, en fixant d'abord la couleur des lignes horizontales, on voit qu'il y a aussi 3 coloriages possibles pour U :



On note $F_3^*(K_1 \# K_2)$ le nombre de 3-coloriages ayant la même couleur sur les deux branches où l'on effectue la composition. On obtient

$$F_3(K_1 \# K_2 \sqcup U) = 3 F_3^*(K_1 \# K_2)$$

et comme

$$F_3(K_1 \# K_2 \sqcup U) = 3 F_3(K_1 \# K_2)$$

On a

$$F_3^*(K_1 \# K_2) = F_3(K_1 \# K_2)$$

On voit que les coloriages valides de la somme connexe ont forcément les deux branches où l'on fait la somme de la même couleur.

Cela induit plusieurs choses :

- Les coloriages de la somme connexe induisent des coloriages valides pour chacun des deux noeuds si on les re-séparent car les deux brins seront de la même couleur.
- Les coloriages induits sur chacun des noeuds de cette manière auront la même couleur à l'endroit où l'on réalise la composition.
- Si K_1 et K_2 possèdent chacun un coloriage avec la même couleur au niveau de l'endroit où l'on souhaite réaliser la composition alors cela entraîne un coloriage valide pour $K_1 \# K_2$.

Il suffit donc de se demander : lorsque l'on impose un coloriage de K_1 combien avons-nous de coloriages possibles pour K_2 pour que la composition ait un coloriage valide.

Remarquons que si on prend un point d'un noeud K et que l'on regarde tous les coloriages tels

que ce point soit en rouge, on note ce nombre de coloriage $F_r(K)$, alors on a $F_r(K) = \frac{1}{3}F_3(K)$. C'est en effet à cause du rôle symétrique que jouent les couleurs, car on a évidemment :

$$F_r(K) = f_b(K) = F_v(K)$$

et

$$F_3(K) = F_r(K) + f_b(K) + F_v(K).$$

Finalement, quand on impose un coloriage pour K_1 on a $\frac{1}{3}F_3(K)$ coloriages possibles pour K_2 , d'où

$$F_3(K_1 \# K_2) = F_3(K_1) \times \left(\frac{1}{3}F_3(K_2)\right) = \frac{1}{3}F_3(K_1) \times F_3(K_2).$$

□

Corollaire 4.6. Soit T le noeud de trèfle et $T^{\#n}$ la somme connexe de n noeuds de trèfle. On a

$$F_3(T^{\#n}) = 3 \times 3^n.$$

Si i est différent de j alors par le corollaire précédent et l'invariance du nombre de 3-coloriages, on en déduit que $T^{\#i}$ et $T^{\#j}$ sont deux noeuds différents.

Théorème 4.7. La famille des $(T^{\#n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une famille infinie de noeuds deux à deux non-équivalents.

Ceci conclut notre raisonnement.

Remarque 4.6. Si l'on essaye de regarder les 3-coloriages du noeud de huit, on se rend compte qu'il n'y en a que 3, tous monochromes. L'invariant de tricolorabilité ne nous permet donc pas de faire la distinction entre le noeud de huit et le noeud trivial, cela nous motive donc à chercher des invariants plus fins et plus puissants.

4.4 Surfaces de Seifert

Théorème 4.8. Tout noeud est le bord d'une surface compacte orientable contenue dans \mathbb{R}^3 .

Ce théorème n'est pas si évident à montrer rigoureusement, mais un algorithme permettant de trouver une telle surface à partir d'un diagramme de noeud a été donné par H. Seifert.

Définition 4.9. On appelle une telle surface *Surface de Seifert* du noeud.

Définition 4.10. Parmi les surfaces associées à un noeud N , il en existe une de genre minimum, c'est ce qu'on appelle le *genre* du noeud, on le note $g(N)$.

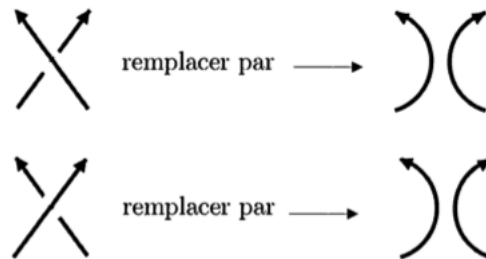
Voici une propriété importante qui sera donnée sans démonstration :

Propriété 4.11. Seul le noeud trivial a pour genre 0.

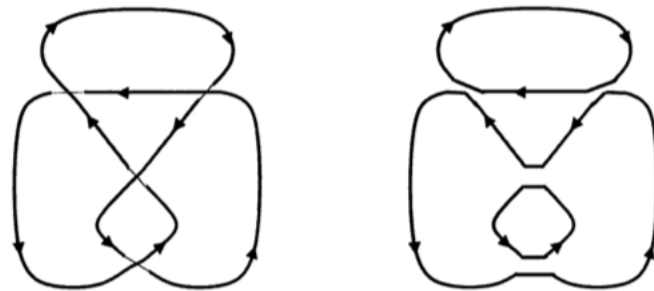
Construction des surfaces de Seifert

On considère le diagramme D d'un noeud orienté N .

1. Supprimer tous les croisements de D de la manière suivante :



2. On vient de transformer D en un ensemble de cercles disjoints.



3. Ces cercles bordent des disques qui peuvent être compris dans des plans différents.

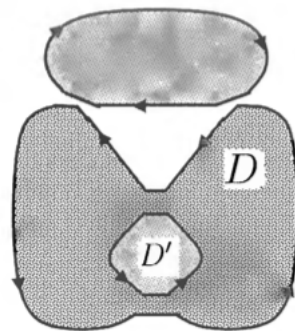


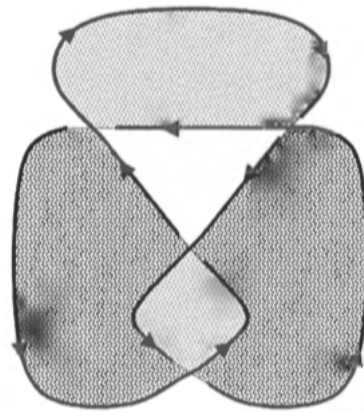
FIGURE 15 – Le disque D' est au-dessus du disque D

4. On relie ces disques entre eux par des "bandes tordues" de façon à reconstituer les croisements de D .



FIGURE 16 – On choisit la bande en fonction du type de croisement initial

5. On vient d'obtenir une surface de Seifert de notre noeud.



5 Arithmétique des noeuds

Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés.

Définition 5.1. On entend par *composition*, *concaténation* ou *connection de somme* des noeuds K_1 et K_2 la manière d'attacher les deux noeuds en respectant l'orientation, cela se fait de la manière représentée sur la figure suivante. On note le nouveau noeud obtenu $K_1 \# K_2$.

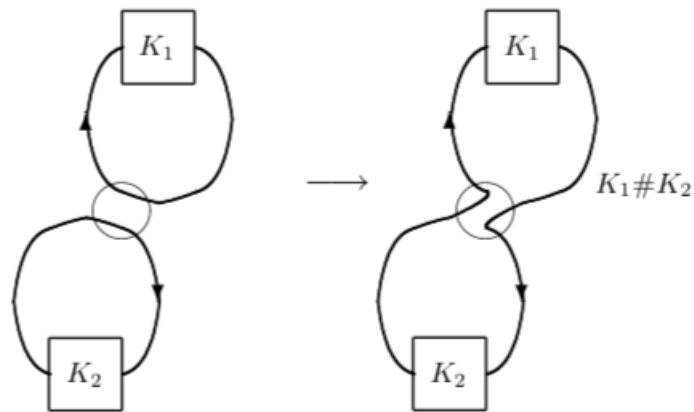


FIGURE 17 – Composition de deux noeuds

On présente maintenant quelques propriétés intuitives.

Propriété 5.2. La composition est bien définie, i.e., elle ne dépend pas de l'endroit où l'on attache les deux noeuds.

La démonstration de cette propriété se base sur la même idée que celle de la proposition suivante :

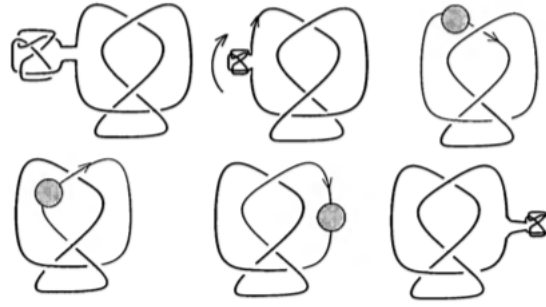


FIGURE 18 – Commutativité de la composition

Propriété 5.3. La composition est commutative, i.e., $K_1 \# K_2$ et $K_2 \# K_1$ sont équivalents.

Définition 5.4. On définit aussi de manière plus simple la somme déconnectée de deux noeuds qui consiste à considérer leur union disjointe.

Théorème 5.5. Soit K_1 un noeud non trivial, alors pour tout noeud K_2 , le noeud $K_1 \# K_2$ est non trivial.

Démonstration. Supposons que K_1 est non trivial mais que $K_1 \# K_2$ l'est. Considérons la séquence de noeuds suivante

$$K_1 \# K_2, (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2), \dots,$$

Avec à chaque fois le premier noeud qui est contenu dans la boule de rayon 1, le deuxième dans la boule de rayon $1/2$, le troisième dans la boule de rayon $1/4$ et ainsi de suite. On peut donc mettre cette série infinie dans un intervalle fini, (voir figure). On obtient ainsi un noeud, que l'on notera a , qui est possiblement sauvage. Puisque $K_1 \# K_2$ est trivial, le noeud a est trivial lui aussi. D'un autre côté on peut aussi écrire a de la manière suivante :

$$a = K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \dots$$

Or la concaténation est commutative donc $K_2 \# K_1$ est lui aussi trivial. Finalement le noeud trivial a est équivalent à K_1 qui est non trivial. Contradiction. \square

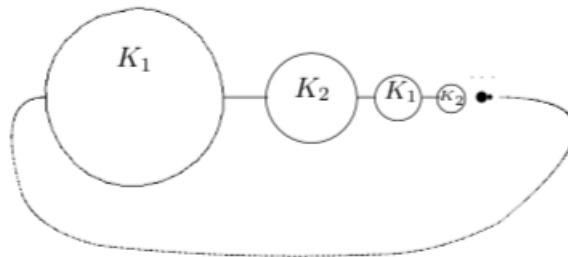


FIGURE 19 – Le noeud a

Remarque 5.1. Cette preuve peut sembler étrange, on a l'impression de retrouver ces tours de passe-passe qui espèrent montrer que $1 = 0$ en considérant la suite $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$, mais le fait de mettre les noeuds dans des "boîtes" de plus en plus petites lui donne un cadre tout à fait rigoureux et nous autorise à faire les opérations faites plus haut.

Remarque 5.2. Une autre preuve plus simple existe et concerne la propriété d'additivité du genre. En effet le noeud trivial a pour genre 0 et $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2) = 0$, or le genre est positif donc $g(K_1) = g(K_2) = 0$ et seul le noeud trivial a pour genre 0, donc K_1 et K_2 sont le noeud trivial.

Propriété 5.6. Le genre est additif, i.e., pour tout noeuds K_1, K_2 on a l'égalité $g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2)$.

Démonstration. Montrons d'abord que $g(K_1) + g(K_2) \leq g(K_1 \# K_2)$.

Soit F_1 et F_2 les surfaces de Seifert de genre minimal des noeuds K_1 et K_2 . Sans perte de généralité on peut considérer que ces surfaces ne s'intersectent pas. On les connecte ensuite par une bande en respectant l'orientation. On obtient donc une surface de Seifert pour le noeud $K_1 \# K_2$ de genre $g(K_1) + g(K_2)$. Il suit

$$g(K_1) + g(K_2) \leq g(K_1 \# K_2).$$

Maintenant, montrons que $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$. Considérons une surface de Seifert de genre minimal F pour le noeud $K_1 \# K_2$. Il existe une sphère S^2 , séparant les noeuds K_1 et K_2 dans la somme connectée $K_1 \# K_2$ en certains points A, B . La sphère S^2 intersecte la surface F le long de plusieurs courbes simples fermées et d'une courbe terminée aux points A, B . Chaque cercle divise la sphère S^2 en deux parties; l'une d'elles ne contient pas de points de la courbe AB . Sans perte de généralité, supposons que l'intersection $F \cap S^2$ est constituée de plusieurs courbes simples fermées a_1, \dots, a_k et d'une courbe reliant A et B . Le voisinage de chaque a_i ressemble à un cylindre. Nous considérons la courbe la plus intérieure, supprimons du cylindre une petite partie cylindrique qui contient le cercle (notre courbe) et collons les autres parties du cylindre par de petits disques. Si la surface obtenue n'est pas connectée, prenons la partie de celle-ci contenant $K_1 \# K_2$. Après avoir effectué ces opérations sur chaque cercle, nous obtenons une surface fermée F' contenant le noeud $K_1 \# K_2$ et coupant S^2 uniquement le long de AB . Les opérations décrites précédemment ne peuvent que faire diminuer le genre. Ainsi, $g(F') \leq g(F)$. Comme F a un genre minimal, on en conclut que $g(F') = g(F) = g(K_1 \# K_2)$. \square

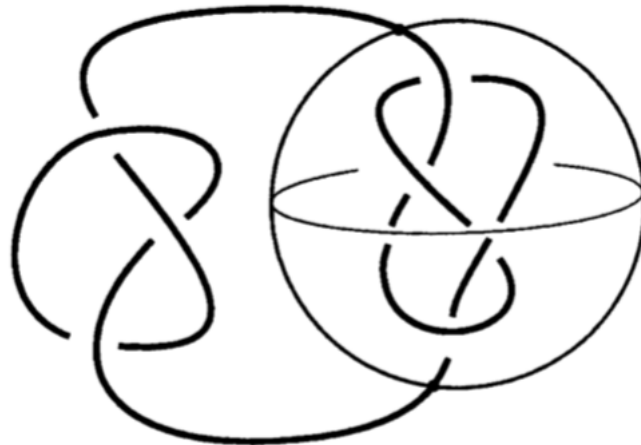


FIGURE 20 – Sphère de séparation

Remarque 5.3. On vient de prouver par le théorème précédent que à part le noeud trivial, aucun noeud n'a d'inverse pour la composition.

Définition 5.7. Un noeud K est dit *premier* si pour tout noeud L, M tels que $K = L\#M$, un des noeuds L ou M est trivial. Les autres noeuds sont dits *composés*.

Définition 5.8. Soient des noeuds K, L et M tels que $K = L\#M$, on dit alors que L et M divise K .

Corollaire 5.9. Un noeud de genre 1 est premier.

Corollaire 5.10. Tout noeud peut-être exprimé comme somme de noeuds premiers.

Remarque 5.4. Ce corollaire est évident grâce à l'additivité du genre, qui lorsque que l'on décompose notre noeud est une suite décroissante minorée. L'existence d'une telle décomposition est donc claire, et on peut se poser la question de savoir si elle est unique à l'ordre des facteurs près. La réponse est oui, mais la preuve de l'unicité est beaucoup moins évidente.

On a aussi un lemme qui ressemble fortement au lemme d'Euclide :

Lemme 5.11. Soient L et M des noeuds et K un noeud premier qui divise $L\#M$. Alors K divise L ou K divise M .

Démonstration. Considérons un noeud $L\#M$ ainsi qu'un certain plan p , qui l'intersecte en deux points et sépare L de M . Puisque $L\#M$ est divisible par K , il existe une 2-sphère S^2 qui intersecte le noeud $L\#M$ en deux points et contient le noeud K .

Si cette sphère n'intersecte pas p , le problème est résolu. Sinon, la sphère S^2 intersecte le plan au niveau de certaines courbes simples (cercles). Si chacun de ces cercles n'est pas lié à $L\#M$, ils peuvent être supprimés par une simple déformation. Dans le cas restant, ils peuvent aussi être enlevés par une déformation de la sphère à cause de la primitivité de K (puisque le noeud est premier, au moins une partie de la sphère contient le noeud trivial). Ainsi, si la somme connectée $L\#M$ est divisible par K , alors soit L soit M est divisible par K . \square

6 Le polynôme de Jones

6.1 Construction du polynôme de Jones par le crochet de Kauffman

Pour construire un nouvel invariant nous allons tout d'abord nous munir d'un noeud L non-orienté qui a n croisements. Chaque croisement peut-être lissé de deux manière différentes.

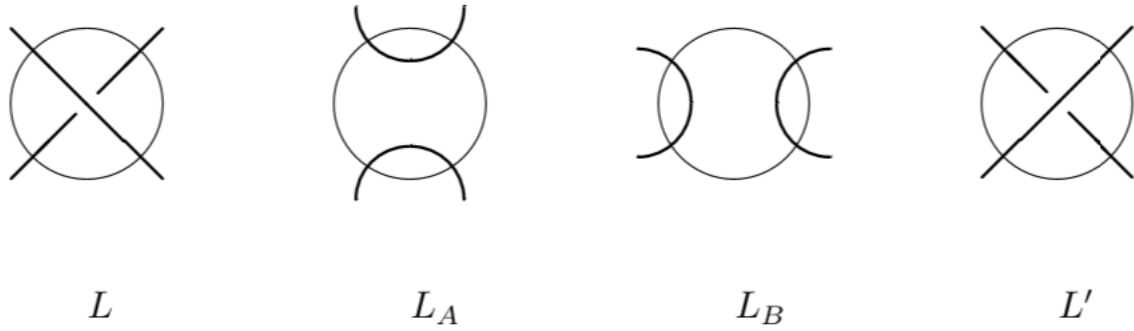


FIGURE 21 – Les deux manières de lisser un croisement

On cherche une fonction en trois variables a , b et c qui vérifie les propriétés suivantes

$$\langle L \rangle = a\langle L_A \rangle + b\langle L_B \rangle \quad (7)$$

$$\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = c\langle L \rangle \quad (8)$$

$$\langle \bigcirc \rangle = 1. \quad (9)$$

Avec L , L' , L_A et L_B des noeuds qui coïncident sauf dans les cercles comme sur la figure. \bigcirc représente le noeud trivial. On va essayer de trouver des conditions sur a , b et c pour obtenir un polynôme invariant par les mouvements de Reidemeister ce qui prouvera que l'on a bien créé un invariant.

Commençons par le deuxième mouvement. En utilisant 7 et 8 on obtient

$$\begin{aligned} \langle \text{diagram} \rangle &= a\langle \text{diagram} \rangle + b\langle \text{diagram} \rangle = (a^2 + b^2)\langle \text{diagram} \rangle + ab\langle \text{diagram} \rangle + ab\langle \text{diagram} \rangle \\ &= (a^2 + b^2 + abc)\langle \text{diagram} \rangle + ab\langle \text{diagram} \rangle \end{aligned}$$

Soit

$$\langle \text{diagram} \rangle = (a^2 + b^2 + abc)\langle \text{diagram} \rangle + ab\langle \text{diagram} \rangle.$$

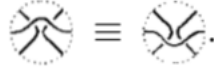
Cela implique donc que $ab = 1$ et $a^2 + b^2 + abc = 0$. On pose donc $b = a^{-1}$ et $c = -a^2 - a^{-2}$. De plus on a que l'invariance sous Ω_2 implique l'invariance sous Ω_3 . En effet on a

$$\langle \text{diagram} \rangle = a\langle \text{diagram} \rangle + a^{-1}\langle \text{diagram} \rangle$$

et

$$\langle \text{diagram} \rangle = a\langle \text{diagram} \rangle + a^{-1}\langle \text{diagram} \rangle.$$

Regardons les deuxièmes parties de ces égalités. On a clairement



De plus en appliquant deux fois Ω_2 on obtient



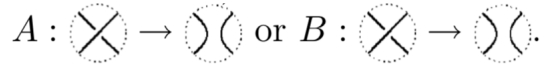
Cela montre l'invariance de notre "hypothétique" polynôme sous Ω_2 .

Avant d'essayer de prouver l'invariance sous Ω_1 nous allons tout d'abord démontrer le résultat suivant

Théorème 6.1. *Il existe une unique fonction sur les classes isotopiques des noeuds à valeurs dans $\mathbb{Z}[a, a^{-1}]$ qui satisfasse les relations 7, 8, 9 et qui soit invariante par Ω_2 et Ω_3 .*

Démonstration. On considère un diagramme non-orienté \bar{L} d'un noeud L qui a n croisements. On numérote les croisements de \bar{L} de 1 à n .

Comme précédemment on peut lisser chaque croisement de deux manières différentes que l'on va appeler A et B .



Définition 6.2. *L'état d'un croisement correspond à l'une des deux possibilités de lisser ce dernier. L'état d'un diagramme correspond à la donnée d'un état pour chaque croisement.*

On a donc que le diagramme \bar{L} à 2^n états possibles. En choisissant l'état s du diagramme, les lissages font de \bar{L} un entrelacs composé uniquement de noeuds triviaux disjoints.

On pose $\alpha(s)$ le nombre de lissage de type A de l'état s , $\beta(s)$ le nombre de lissage de type B et $\gamma(s)$ le nombre de noeud triviaux restants à la fin. En lissant tous les noeuds du diagramme grâce à 7 et en appliquant 8 et 9, on obtient

$$\langle \bar{L} \rangle = \sum_s a^{(\alpha(s)-\beta(s))} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \quad (10)$$

où la somme est sur tous les états s possibles du diagramme.

De cette manière nous avons montré l'unicité d'un polynôme satisfaisant 7, 8 et 9.

De plus 10 montre aussi l'existence d'un tel polynôme.

Maintenant nous pouvons tout simplement définir le polynôme comme dans 10. □

Nous venons de construire le crochet de Kauffman.

Maintenant si on s'intéresse à l'invariance sous Ω_1 , on se rend compte d'un problème. Lorsque l'on applique les différentes propriétés on obtient pas $\langle L \rangle$ comme souhaité mais $(-a^{\pm 3})\langle L \rangle$. Le signe dépend du croisement, si il est de type positif ou négatif. Le crochet de Kauffman n'est donc pas invariant par Ω_1 . En réalité on peut comprendre cela, car Ω_1 joue un rôle un peu différent des deux autres mouvements. D'un point de vue plus intuitif, lorsqu'on fait ce mouvement on vrille la corde ou on la dévrille, et c'est ce vrillage qui donne le signe à notre facteur non souhaité. Il suffit donc de créer un nombre qui traduit ce vrillage.

Pour se faire, à chaque croisement on associe un nombre ± 1 de la manière suivante.

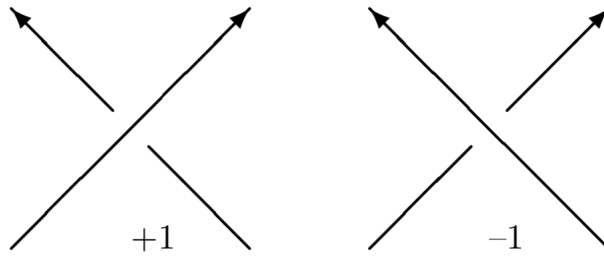


FIGURE 22 – Nombre local d’entortillement

On remarque que pour définir ces nombres on a besoin d’une orientation sur le diagramme. On note $w(L)$ la somme de tous ces nombres pour un diagramme donné, on l’appelle le nombre d’entortillement. Il est facile de voir que ce nombre est invariant sous Ω_2 et Ω_3 mais pas sous Ω_1 où il diffère de ± 1 , ce qui compense exactement notre variabilité sous Ω_1 par le crochet de Kauffman. Nous pouvons donc ainsi définir un polynôme invariant comme suit :

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle \quad (11)$$

où L est un diagramme de noeud orienté, et $|L|$ est le diagramme non-orienté.

Définition 6.3. On appelle cet invariant polynomial défini comme en 11 le polynôme de Kauffman.

Le polynôme de Kauffman satisfait des relations appelées *skein relations*, obtenues simplement en manipulant les différentes propriétés.

$$a^4 X(\text{crossing}) - a^{-4} X(\text{crossing}) = (a^{-2} - a^2) X(\text{cup}) X(\text{cap}).$$

En effectuant le changement de variable $q = a^{-4}$, on obtient un autre invariant polynomial appelé le polynôme de Jones. Il satisfait évidemment l’égalité suivante :

$$q^{-1} V(\text{crossing}) - q V(\text{crossing}) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) V(\text{cup}) V(\text{cap}).$$

Remarque 6.1. Il est à ce moment légitime de se demander pourquoi ne pas s’être arrêté au polynôme de Kauffman. On a l’impression que le polynôme de Jones n’apporte rien de plus que le précédent et pourtant c’est celui-là qui est le plus retenu dans la culture mathématique. En réalité il s’agit juste d’une manière de construire le polynôme de Jones introduite par Kauffman quelques années après que Jones ait construit son polynôme. À l’origine Jones a construit ce polynôme en passant par la théorie des tresses. Il a pour cela utilisé en particulier le théorème d’Alexander qui dit que tout noeud peut être représenté comme clôture d’une tresse.

Lorsque Jones a découvert ce polynôme, il pensait en fait avoir retrouvé d’une manière différente le polynôme d’Alexander. Il s’est donc empressé de calculer le polynôme associé aux noeuds de trèfle droit et gauche et s’est rendu compte qu’ils étaient différents ce qui n’est pas le cas du polynôme d’Alexander car il ne distingue jamais un noeud de son noeud miroir.

6.2 Propriétés du polynôme de Jones et applications

Le polynôme de Jones est un invariant assez puissant. Il dépend de l'orientation du noeud. Lorsque l'on dispose du polynôme de Jones d'un noeud, pour avoir le polynôme de son envers il suffit d'effectuer le changement de variable $q \rightarrow q^{-1}$.

Théorème 6.4. *Pour K_1 et K_2 des noeuds orientés arbitraires on a :*

$$V(K_1 \# K_2) = V(K_1) V(K_2).$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, il suffit de remarquer que le crochet de Kauffman est multiplicatif d'après 10 et le nombre d'entortillement est additif. \square

Théorème 6.5. *Pour K_1 et K_2 des noeuds orientés arbitraires on a :*

$$V(K_1 \sqcup K_2) = -(q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})V(K_1) V(K_2).$$

Propriété 6.6. Le polynôme de Jones n'est jamais égal à 0.

Remarque 6.2. Le polynôme de Jones n'est pas un invariant complet comme nous le montre l'exemple suivant

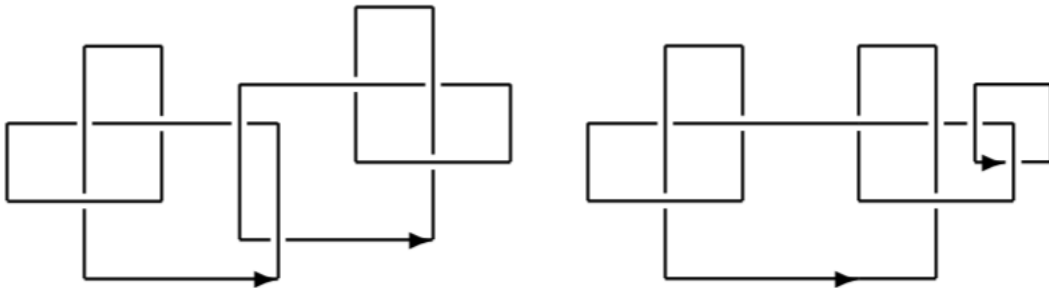


FIGURE 23 – Deux noeuds non isotopiques avec le même polynôme de Jones

Remarque 6.3. On peut se poser la question de savoir si le polynôme de Jones repère le noeud trivial, c'est-à-dire si un noeud a un polynôme égal à 1 est-ce que cela implique que le noeud soit trivial. C'est une question encore ouverte aujourd'hui.

7 Homologie de Khovanov

Nous allons maintenant essayer de construire une généralisation du polynôme de Jones. Cela va consister à remplacer les polynômes par des espaces vectoriels gradués et de construire ensuite un complexe de chaînes. En revanche ce complexe ne sera pas un invariant de noeud mais c'est son homologie qui le sera.

Définition 7.1. Soit $W = \bigoplus_m W_m$ un espace vectoriel gradué avec pour composantes homogènes W_m . La dimension graduée de W est la série de puissance

$$q\dim W := \sum_m q^m \dim W_m.$$

Durant toute la section on pose $V := V_- \oplus V_+$ un espace vectoriel gradué où v_{\pm} sont les éléments de la base de V .

Exemple 7.1. Soit l'espace vectoriel V . Alors $V = V_{-1} \oplus V_1$ et sa dimension graduée est $q\dim V = q^{-1} + q$.

On voit donc que la dimension graduée fournit un polynôme. Or nous aurons besoin de pouvoir décaler les degrés par la suite. Nous introduisons donc un opérateur sur les espaces vectoriels.

Définition 7.2. Soit $\cdot\{l\}$ l'opération de changement de degré d'un espace vectoriel gradué. Si $W = \bigoplus_m W_m$ est un espace vectoriel gradué, on pose $W\{l\}_m := W_{m-l}$. Nous avons que $q\dim W\{l\} = q^l q\dim W$. On dit alors qu'un élément de W_m est un élément de degré m .

Remarque 7.1. Le degré d'un tenseur est la somme des degrés de chacun des éléments.

On définit aussi le décalage dans les complexes de chaînes comme suit :

Définition 7.3. Soit $\cdot[s]$ le décalage d'un complexe de chaînes. C'est-à-dire que si \bar{C} est un complexe de chaînes $\dots \rightarrow \bar{C}^r \rightarrow \bar{C}^{r+1} \rightarrow \dots$ et si $C = \bar{C}[s]$, alors on a que $C^r = \bar{C}^{r-s}$.

Remarque 7.2. Dans cette définition il faut aussi faire le décalage des différentielles du complexe de chaînes.

Par définition d'un complexe de chaînes on a que $d^2 = 0$ (en oubliant les indices). Nous avons donc que $\text{Im}d^{r+1} \subseteq \text{Ker}d^r$. On parle de suite exacte lorsque $\text{Im}d^{r+1} = \text{Ker}d^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$. L'homologie s'intéresse aux éléments du noyau qui ne sont pas dans l'image, on mesure en quelque sorte l'inexactitude du complexe de chaînes.

Définition 7.4. Le n -ième groupe d'homologie associé à un complexe de chaînes (C) est $H^n := \text{Ker}d^n / \text{Im}d^{n+1}$ où $d^r : C^r \rightarrow C^{r-1}$.

7.1 Définition des espaces gradués

Après avoir vu la définition de l'homologie, il faut maintenant arriver à associer un complexe de chaînes à un noeud donné. On va tout d'abord trouver une suite d'espaces vectoriels que l'on fera ensuite interagir entre eux en donnant la définition des différentielles associées.

De la même manière que pour le polynôme de Jones nous introduisons la notion de résolution d'un croisement qui permet de faire disparaître un croisement.

Définition 7.5. On appelle résolution d'un croisement les deux opérations suivantes. L'opération 0-lisse et 1-lisse définies comme sur la figure. On parle de résolution d'un diagramme L un nouveau diagramme où chaque croisement a été résolu. On appelle poids

d'une résolution α , noté $|\alpha|$, le nombre d'opérations 1-lisse utilisées pour résoudre le noeud.

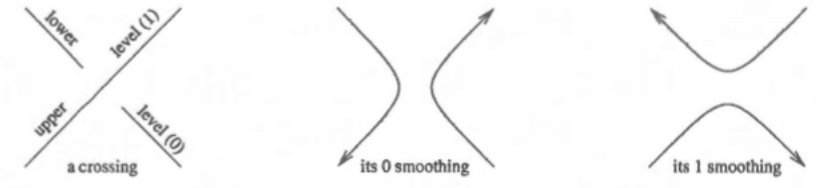


FIGURE 24 – Résolution d'un croisement

Soit L le diagramme de notre noeud, χ l'ensemble de ses croisements, $n = |\chi|$. On numérote de plus les éléments de χ de manière arbitraire et on note $n = n_+ + n_-$ où n_+ (n_-) est le nombre de croisement positif (négatif) dans χ .

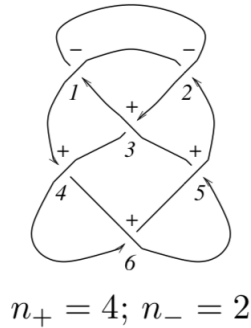


FIGURE 25 – Comptage des croisements positifs et négatifs

Nous donnons maintenant un ordre sur les n croisements d'un diagramme, on peut associer à chaque résolution une suite de 0 et de 1 de longueur n de telle sorte que le i -ième terme de la suite corresponde à la manière dont a été résolu le i -ième croisement. On peut donc considérer tous les n -tuplets $\{0, 1\}^n$ qui sont au nombre de 2^n , ce qui est aussi le nombre de sommet d'un n -cube. Nous allons donc construire un cube avec pour sommet les résolutions de l'entrelacs. Pour savoir quelles résolutions nous allons relier dans notre n -cube nous mettons un ordre partiel grâce au poids. Nous relierons deux résolutions si leur différence de poids est de 1. Ensuite à chaque sommet on associe l'espace $V_\alpha(L) := V^{\otimes k}\{r\}$ où k est le nombre de cercles restants à la fin de la résolution α et $r = |\alpha|$. Le r -ième espace vectoriel de la suite est donc $\llbracket L \rrbracket^r := \bigoplus_{|\alpha|=r} V_\alpha(L)$. En posant $\llbracket L \rrbracket := \bigoplus_r \llbracket L \rrbracket^r$, on définit $C(L) := \llbracket L \rrbracket[-n_-]\{n_+ - 2n\}$.

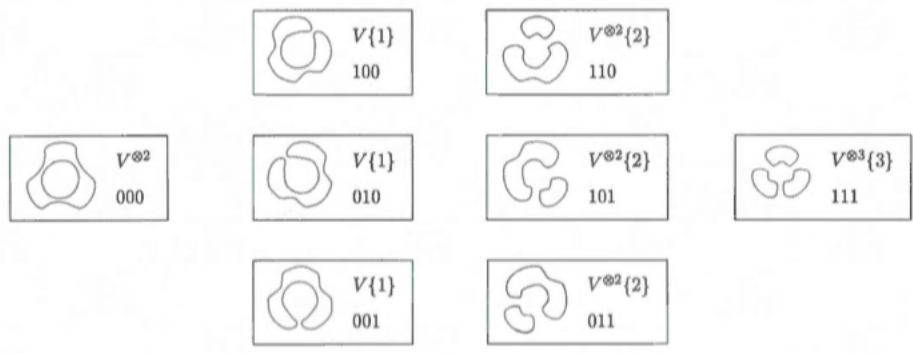


FIGURE 26 – Résolution du noeud de trèfle

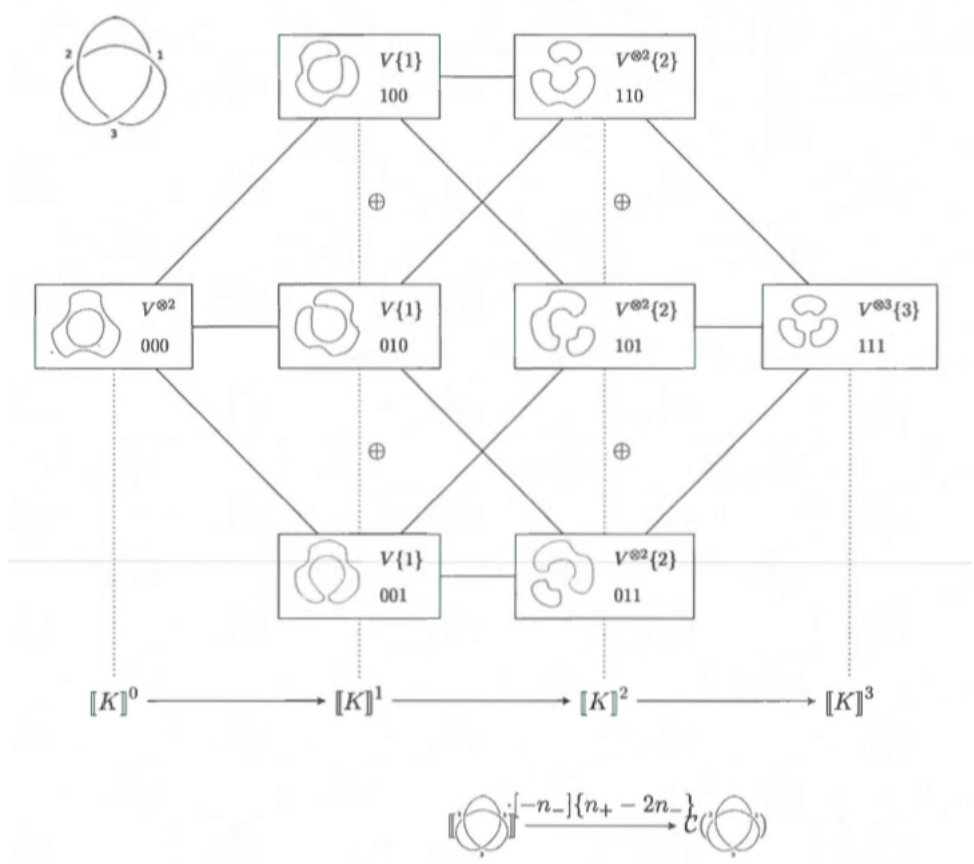


FIGURE 27 – Calcul du complexe de Khovanov du noeud de trèfle

Définition 7.6. La caractéristique d'Euler graduée d'un complexe de chaînes est la somme alternée des dimensions graduées de ses groupes d'homologie.

Remarque 7.3. Si la différentielle est de degré 0 et que les espaces vectoriels sont de dimensions finies alors on peut vérifier que la caractéristique d'Euler correspond à la somme alternée des dimensions graduées des espaces du complexe de chaînes.

Si l'on oublie pour le moment que notre complexe de chaîne en cours de construction n'a pas encore de différentielle on a le théorème suivant :

Théorème 7.7. *La caractéristique d'Euler graduée de $C(L)$ est le polynôme de Jones non normalisé de L .*

Démonstration. La preuve ne sera pas donnée ici, on pourra la trouver dans [BAR02] qui reconstruit le polynôme de Jones à l'aide du cube de résolution. Il faut ensuite étudier les effets des décalages d'indices introduits plus haut et l'on retrouve bien le polynôme de Jones. En revanche la preuve repose sur le fait que la différentielle (encore non construite pour le moment) est de degré 0 et que les espaces vectoriels sont de dimensions finies. \square

7.2 Définition de la différentielle

Il nous reste maintenant à définir l'application différentielle pour avoir un complexe de chaînes. On va procéder de façon analogue à la création des espaces vectoriels. On commence par étiqueter les arêtes du cube de résolution par des mots dans $\{0, 1, *\}^n$ avec exactement une $*$. L'étiquetage est fait de manière à ce que l'endroit où se situe l'étoile représente le 0 qui se change en 1 ou inversement. On appelle le poids d'une arête ξ , noté $|\xi|$ le poids comme définit précédemment pour les résolutions en remplaçant $*$ par un 0.

Exemple 7.2. Si $\xi = d_{101*01}$ alors $|\xi| = 3$.

Remarque 7.4. Le nombre de cercles restants dans des résolutions reliées par une arête ne varie que de 1. On peut donc penser à un morphisme entre deux états qui fusionne deux cercles ou qui les sépare. On définit donc une opération de fusion et une de séparation.

Définition 7.8. On appelle $m : V \otimes V \rightarrow V$ l'opération de fusion et $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ l'opération de séparation :

$$m := \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ & v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- & v_- \otimes v_- \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Delta := \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- \end{cases}$$

Dans la suite d_ξ représente soit m soit Δ .

Remarque 7.5. On remarque que m et Δ sont de degré -1 et sont respectivement commutative et co-commutative, ce qui nous sera utile pour la suite.

Définition 7.9. Le cube avec les différentielles partielles d_ξ le long des arêtes allant dans le sens de l'augmentation des coordonnées est dit commutative (resp. anticommutative) si chaque face de cube 2-dimensionnel est un diagramme commutatif (resp. anticommutatif).

Nous pouvons donc dorénavant passer d'une arête à l'autre. Et de plus au vu des propriétés de m et Δ nous pouvons vérifier que les faces du cube sont commutatives.

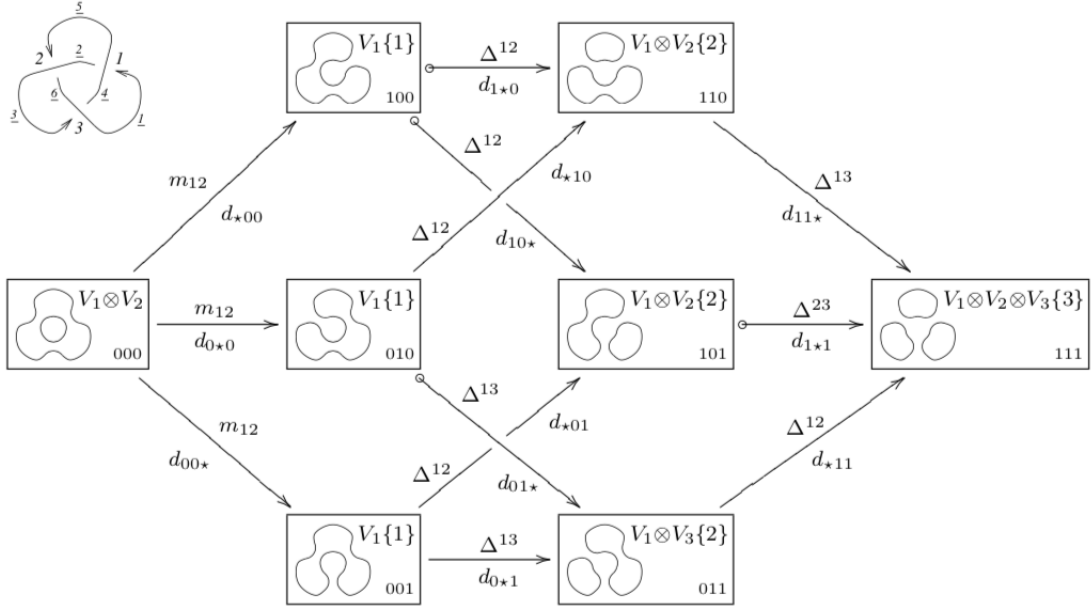


FIGURE 28 – Les opérateurs m et Δ associés aux arêtes dans la construction du complexe du noeud de trèfle

On peut donc tenter de définir les différentielles.

Définition 7.10. La différentielle $d^r : \llbracket L \rrbracket^r \rightarrow \llbracket L \rrbracket^{r-1}$ est définie par :

$$d^r := \sum_{|\xi|=r} (-1)^\xi d_\xi.$$

Il faut encore expliquer le signe $(-1)^\xi$. Nous voulons en effet que $d^2 = 0$, pour cela il suffit que toutes les faces du cube soient anti-commutatives. Or pour le moment elles sont commutatives. On vérifie aisément que en posant $(-1)^\xi := (-1)^{\sum_{i < j} \xi_i}$ cela va fonctionner (où j est le rang de $*$). Sur la figure 29 on a indiqué les arêtes portant le signe -1 par des petits cercles au bout des flèches. La différentielle ainsi construite est bien de degré 0, car Δ et m sont de degré -1 mais lorsque suit une arête on réalise une opération 1-lisse ce qui dans la définition de notre complexe l'avait décalé de 1. Ceci valide le théorème 7.7.

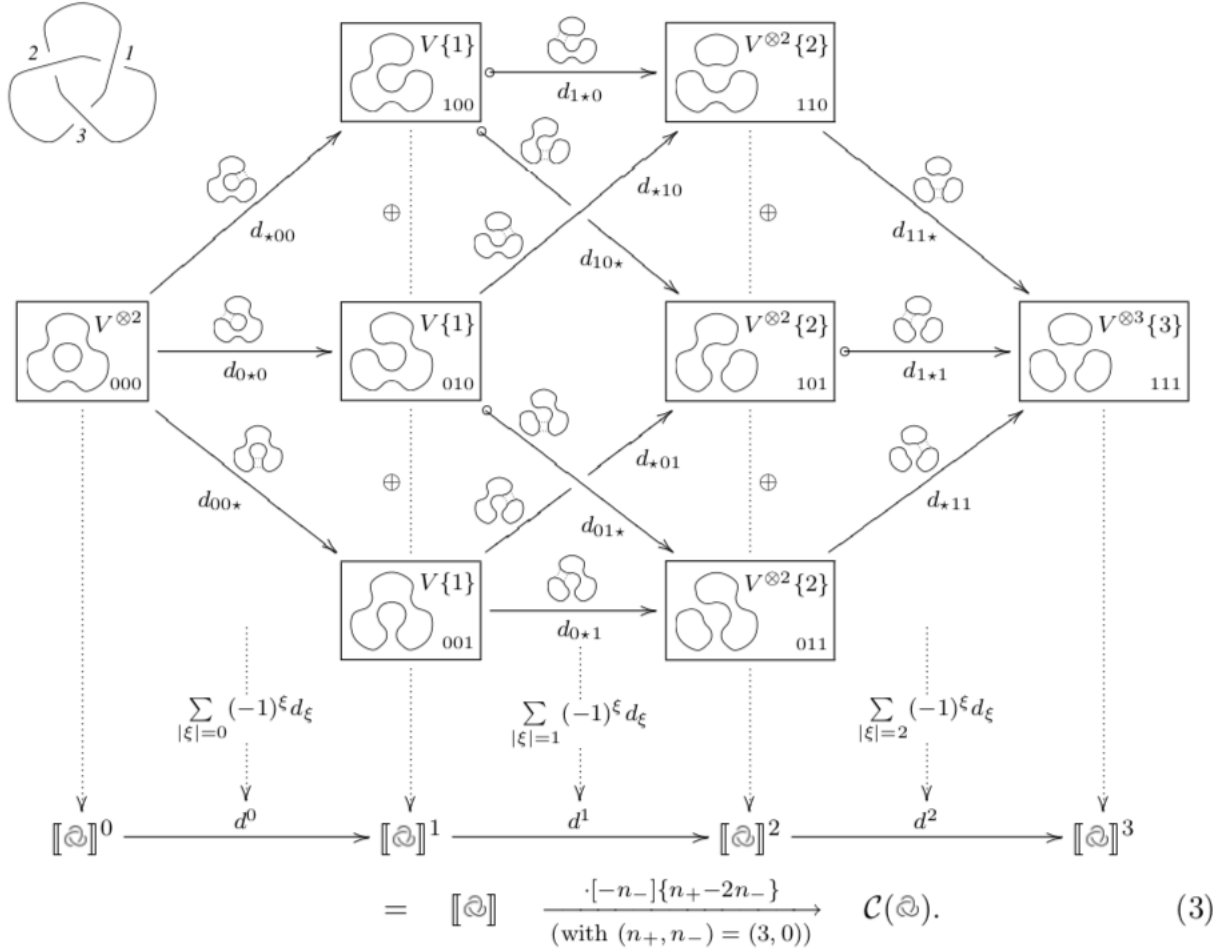


FIGURE 29 – Construction des différentielles pour le noeud de trèfle

Définition 7.11. Soit $H^r(L)$ le r -ième groupe d'homologie de $C(L)$. On appelle $Kh(L)$ le polynôme gradué de Poincaré du complexe $C(L)$ en la variable t défini par :

$$Kh(L) := \sum_r t^r q \dim H^r(L).$$

Passons maintenant au théorème qui va conclure cette section :

Théorème 7.12. *Les dimensions graduées des groupes d'homologie sont des invariants de noeuds et donc $Kh(L)$ est un polynôme en les variables t et q qui est un invariant de noeud. Si on l'évalue en $t = -1$, on retrouve le polynôme de Jones.*

La preuve de ce théorème ne sera pas donnée ici, on pourra se rapporter à [BAR02]. Elle consiste de la même manière que pour la preuve de l'invariance du polynôme de Jones à regarder l'invariance sous les différents mouvements de Reidemeister. C'est une preuve longue qui fait intervenir des outils plus élaborés sur les complexes de chaînes.

On peut maintenant se demander si l'on a construit un invariant plus ou moins fort que le polynôme de Jones. Existe-t-il des noeuds qui ont le même polynôme de Jones mais avec des polynômes de Poincaré différents ? La réponse est oui, nous avons construit un invariant plus puissant. Dans un vocabulaire plus savant, nous avons en réalité réalisé une catégorification du polynôme de Jones.

Exemple 7.3. Voici l'exemple de deux noeuds avec le même polynôme de Jones mais avec des polynômes de Poincaré différents :



Le polynôme de Poincaré de noeud 5_1 est

$$Kh(5_1) = q^{-15}t^{-5} + q^{-11}t^{-4} + q^{-11}t^{-3} + q^{-7}t^{-2} + q^{-5} + q^{-3}$$

celui du noeud 10_{132} est

$$Kh(10_{132}) = q^{-15}t^{-7} + q^{-11} + t^{-6} + q^{-11}t^{-5} + (q^{-7} + q^{-9})t^{-4} + (q^5 + q^{-9})t^{-3} + 2q^{-5}t^{-2} + q^{-1}t^{-1} + q^{-1} + q^{-3}.$$

On voit donc que ces deux noeuds sont différents, or si on pose $t = -1$ pour retrouver les polynômes de Jones, on voit que

$$Kh(5_1)_{t=-1} = Kh(10_{132})_{t=-1} = -q^{-15} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3}.$$

On avait évoqué la question de savoir si le polynôme de Jones peut repérer le noeud trivial qui est encore une question ouverte aujourd'hui. La même question se posait pour l'homologie de Khovanov au début des années 2000. C'est en 2010 que Kronheimer et Mrowka ont réussi à répondre à cette question en prouvant que l'homologie de Khovanov était en effet un détecteur du noeud trivial.

Références

- [MAN04] Vassily Manturov, *Knot Theory*, Chapman & Hall, 2004.
- [LIC97] W.B. Raymond Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer, 1997.
- [DIM10] Jean-Yves Le Dimet, *Noeuds & Tresses : une introduction mathématiques*, Vuibert, 2010.
- [CF63] Richard H. Crowell et Ralph H. Fox, *Introduction to knot theory*, Springer-Verlag, 1963.
- [SOS99] Alexei Sossinsky, *noeuds : genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, 1999.
- [JAC10] Annie Jacques, *Théorie des noeuds : les invariants polynomiaux*, mémoire université de Laval, 2010.
- [BAR02] Dror Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, 2002.

[LIV96] Charles Livingston, *Knot theory*, The mathematical association of america, 1996.

[GQ20] Thibault Godin et Hoel Queffelec, *Une famille infinie de noeuds*, Images Des Mathématiques CNRS, 2020.

[SCO13] Maxime Scott, *Homologie de Khovanov : de la définition à la résolution de la conjecture de Milnor*, mémoire université du Québec à Montréal, 2013.