Le théorème de Weierstrass [1]

Théorème (de Weierstrass)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Toute fonction continue f sur $[a,b]$ est limite uniforme de polynômes sur $[a,b]$.*

Démonstration. On commence par démontrer ce théorème sur $[0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0,\ldots,n\}$, on note R_n^k : $x \longmapsto C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ et pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_n^k(x)$ (on remarque ici que pour f continue, $B_n(f)$ est un polynôme). Calculons explicitement

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 R_n^k(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 R_n^k(x) - 2x\frac{k}{n}R_n^k(x) + x^2 R_n^k(x)\\ &= B_n(x^2) - 2xB_n(x) + x^2 B_n(1)\end{aligned}$$

(Où x^n remplace par abus la notation $x \longmapsto x^n$)
On calcule séparément chacun des trois termes de cette somme. On note au préalable

$$F(a,b) = (a+1-b)^n. = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k (1-b)^{n-k}.$$

- $x^2 B_n(1) = x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x^2 (x+1-x)^n = x^2$
- $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^k)'(1-x)^{n-k}$ d'où
$$B_n(x) = \frac{x}{n}\frac{\partial F}{\partial a}(x,x) = \frac{x}{n} n (x+1-x)^{n-1} = x.$$
- $B_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \frac{x}{n^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial F}{\partial a}\right)(x,x) = \frac{x}{n^2}\left(n(x+1-x)^{n-1} + xn(n-1)(x+1-x)^{n-2}\right)$ d'où
$$B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$
.

On réinjecte cela dans $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 R_n^k(x) = B_n(x^2) - 2xb_n(x) + x^2 B_n(1) = \frac{x(1-x)}{n}$. Ainsi, on a

$$\sum_{k,|k/n-x|\geqslant\eta} R_n^k(x) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 R_n^k(x) = \frac{1}{\eta^2}\frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{n\eta^2}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[0,1]$ (compact) elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe M tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$. Par Heine, f est aussi uniformément continue sur $[0,1]$ id est, pour le ε fixé, $\exists \eta > 0, \forall x, x', |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
On s'intéresse à

$$|B_n(f)-f(x)| = |B_n(f)-B_n(1)\times f(x)| \leqslant \left|\sum_{k,|k/n-x|<\eta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)R_n^k(x)\right| + \left|\sum_{k,|k/n-x|\geqslant\eta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)R_n^k(x)\right|$$

$$|B_n(f)-f(x)| \leqslant \varepsilon \sum_{k,|k/n-x|<\eta} R_n^k(x) + 2M\sum_{k,|k/n-x|\geqslant\eta} R_n^k(x) \leqslant \varepsilon + \frac{2M}{\eta^2 n}.$$

Si N est choisi dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{2M}{\eta^2 n} < \varepsilon, \forall n \geqslant N$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon, \forall n \geqslant N, \forall x \in I$. On a donc montré que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
On se ramène au cas où $I = [a,b]$ en considérant la fonction $g(x) = f(a+(b-a)x), \forall x \in [0,1]$. □

1. Les maths en tête, Xavier GOURDON, page 230