Théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ

Florian BOUGUET

Références :
- COGNET : Algèbre bilinéaire
- TAUVEL : Géométrie (pour la fin)

Il existe quantité de théorèmes de CARTAN-DIEUDONNÉ. En fait, il s'agit en gros de montrer que les isométries sont engendrées par des réflexions et éventuellement de majorer leur nombre. On va faire un peu mieux ici.

Quelques petits rappels :
- l'ensemble des isométries vectorielles d'un espace vectoriel E est $\mathcal{O}(E)$; il s'agit de l'ensemble des applications linéaires conservant le produit scalaire
- on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan
- par convention, Id est le produit de 0 réflexions

Theorème 1 (*de* CARTAN-DIEUDONNÉ *vectoriel*)

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n et $f \in \mathcal{O}(E)$
Notons $F = \ker(f - Id)$ et $p(f) = n - \dim F$ la codimension de l'espace des invariants de f
Alors f s'écrit comme produit de $p(f)$ réflexions, et on ne peut pas faire moins.

Preuve :

On va raisonner par récurrence sur $p(f)$
► si $p(f) = 0$
Pas de problème ici, cela signifie que $f =$ Id et donc f est le produit de 0 réflexions.
► si $p(f) \leq 1$
Supposons que toute isométrie g telle que $p(g) < p(f)$ soit exactement le produit de $p(g)$ réflexions. L'idée de la preuve va être de montrer que, en composant une isométrie par une réflexion, on lui rajoute un point fixe (et donc on augmente d'une dimension l'espace de ses invariants). C'est la marche à suivre *pratique* pour obtenir la décomposition de notre isométrie.

F est un espace vectoriel, par hypothèse distinct de E. On peut décomposer

$$E = F \oplus F^{\perp} \qquad \text{avec } \dim F^{\perp} \geq 1$$

Notons $\tilde{E} = F^{\perp}$. Remarquons que $\tilde{E}$ est stable par f (les isométries conservant l'orthogonalité). On peut alors noter $\tilde{f} = f_{|\tilde{E}}$ et remarquer que $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{E})$ (par définition des isométries). Moralement, on va maintenant travailler dans l'espace $\tilde{E}$ comme espace ambiant, et décomposer $\tilde{f}$ dans cet espace, avant de prolonger le tout sur E. L'avantage est que $\ker \tilde{f} = \{0\}$ (on peut penser à $\tilde{f}$ comme une rotation de $\mathbb{R}^2$).

$\exists x_0 \neq 0$ tel que $\tilde{f}(x_0) \neq x_0$ et $\|\tilde{f}(x_0)\| = \|x_0\|$. Il existe donc $\tilde{H} = \text{Vect}(\tilde{f}(x_0) - x_0)^{\perp}$ hyperplan de $\tilde{E}$ tel que $\tilde{s}$, réflexion par rapport à $\tilde{H}$, vérifie

$$\tilde{s} \circ \tilde{f}(x_0) = x_0$$

Notons $\tilde{g} = \tilde{s} \circ \tilde{f} \in \mathcal{O}(E)$. Alors $\text{Vect}\{x_0\} \subseteq \ker(\tilde{g} - \tilde{\text{Id}})$. On a donc $p(\tilde{g}) \leq \dim \tilde{E} - 1 = \dim F^{\perp} - 1 = p(f) - 1$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\tilde{s} \circ \tilde{f} = \tilde{s}_1 \circ \cdots \circ \tilde{s}_{p(g)}$$

Munis de cette décomposition, il est temps de "remonter" dans notre espace d'origine. Considérons $s_i \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$s_i = \text{Id}_{|F} + \tilde{s}_i$$

On définit de la même manière s avec $\tilde{s}$ et on obtient la décomposition

$$f = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_{p(g)}$$

On peut donc écrire f comme produit de $p(g) + 1$ réflexions. Montrons qu'on ne peut en avoir moins que $p(f)$. Soient $H_1, \ldots H_q$ des hyperplans de E tels que, si s_i est la réflexion par rapport à H_i, on a

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_q$$

On a l'inclusion $\cap_{i=1}^{q} H_i \subseteq F$ et, d'autre part, $\cap_{i=1}^{q} H_i = \text{Vect}\{x_1, \ldots x_q\}^{\perp}$ pour x_i vecteur normal de H_i. Donc

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{q} H_i \right) \geq n - q$$

Pour finir, $\dim F = n - p(f) \geq \dim \left(\cap_{i=1}^{q} H_i\right) \geq n - q$. Donc $q \geq p(f)$. On a déjà vu que $q \leq p(\tilde{g}) + 1 \leq p(f)$ d'où égalité.

Ce qui conclut la preuve de notre récurrence.

□

Une application directe de ce théorème est le théorème suivant (probablement un peu long pour un développement, mais il est toujours bon d'avoir les idées claires dans le cadre affine) :

Theorème 2 (*de* CARTAN-DIEUDONNÉ *affine*)

Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de direction E et φ une isométrie affine de $\mathcal{E}$
Alors
- *si φ a un point fixe, φ est exactement le produit de $p\left(\vec{\varphi}\right)$ réflexions affines*
- *si φ n'a pas de point fixe, φ est exactement le produit de $p\left(\vec{\varphi}\right) + 2$ réflexions affines, et alors $p\left(\vec{\varphi}\right) < n$*

Preuve :

Notons $p = p\left(\vec{\varphi}\right)$.

► Premier cas
Le premier cas est facile, car si $\varphi(O) = O$ on a

$$\vec{\varphi} = s_1 \circ \cdots \circ s_p$$

En notant σ_i l'isométrie affine de partie linéaire s_i telle que $\sigma_i(O) = O$, σ_i est une réflexion et

$$\varphi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p$$

► Second cas
C'est plus délicat. On va se contenter de majorer le nombre de réflexions (ce qui est en général suffisamment satisfaisant de manière théorique). φ n'a pas de point fixe, donc soit $O \in \mathcal{E}$. Définissons H l'hyperplan médiateur de $[O, \varphi(O)]$ et σ la réflexion par rapport à H. Alors $\sigma \circ \varphi(O) = O$ et on peut appliquer le premier point pour majorer grossièrement le nombre de réflexions qui composent $\sigma \circ \varphi$ par n. En composant par σ, on a que φ est produit d'au plus $n + 1$ réflexions.

Dans un second temps, on peut écrire $\varphi = \tau \circ \psi$ où τ est une translation et ψ possède un point fixe. De plus $\vec{\varphi} = \vec{\psi}$ donc ψ s'écrit comme le produit de p réflexions. Il est évident que τ s'écrit comme le produit de 2 réflexions ce qui permet de conclure.

□