Composantes connexes des formes quadratiques non dégénérées

Arnaud Girand

16 avril 2012

Références :
- [FGN10], p. 214–215

Leçons :
-

Prérequis :
-

Proposition 1 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$–e.v de dimension finie $n \geq 1$.*
On munit l'ensemble $Q(E)$ de la norme $N : q \mapsto \sup \|x\| = 1 |q(x)|$. Soit $\Omega(E)$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E.
Alors :

(i) *$\Omega(E)$ est un ouvert de $Q(E)$;*

(ii) *pour tout $q \in Q(E)$, il existe un réel $k > 0$ tel que si $q' \in Q(E)$ et $N(q - q') < k$ alors q et q' ont même signature ;*

(ii) *les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les ensembles $\Omega_i(E)$ constitués des formes quadratiques (non dégénérées) de signature $(i, n - i)$ pour $i \in \{0, \dots n\}$.*

Démonstration :

(i) une fois choisie une base de E on a un isomorphisme $Q(E) \cong S_n(\mathbb{R})$ et $\Omega(E) \cong S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ d'où le résultat.

(ii) Soit $q \in Q(E)$ de signature (r, s). Comme q est non dégénérée on a $r + s = n$, de fait si on considère une base q–orthogonale $(e_1, \dots e_r, f_1, \dots, f_s)$ convenablement ordonnée (i.e $q(e_i) = 1$ et $q(f_j) = -1$) on obtient un s–e.v $F := \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ (resp. $G := \langle f_1, \dots, f_s \rangle$) de E tel que $q_{|_F}$ (resp. $q_{|_F}$) soit définie positive (resp. définie négative), avec en "bonus" $E = F \oplus G$. $q_{|_F}$ est définie positive donc $\sqrt{q}$ constitue une norme euclidienne sur F, qui est donc équivalente à $\|.\|$. En particulier, il existe $k_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in F,\ \sqrt{q}(x) \geq k_1 \|x\| \text{ d'où } q(x) \geq k_1^2 \|x\|^2$$

En raisonnant de même avec la norme euclidienne (sur G) $\sqrt{-q}$ on obtient l'existence de $k_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in G,\ q(x) \leq -k_2^2 \|x\|^2$$

Si on pose $k := \min(k_1^2, k_2^2)$ on a alors :

$$\forall x \in F,\ q(x) \geq k\|x\|^2 \text{ et } \forall x \in G,\ q(x) \leq -k\|x\|^2$$

Pour tout $q' \in Q$ tel que $N(q - q') < k$ on a :

$$\forall x \neq 0,\ |q(x) - q'(x)| \leq N(q - q')\|x\|^2 < k\|x\|^2$$

Donc :

$$q(x) - q'(x) < k\|x\|^2 \text{ et } q'(x) - q(x) < k\|x\|^2$$

De fait :
– si $x \in F \setminus \{0\}$ on a :

$$q'(x) > q(x) - k\|x\|^2 \geq 0$$

– si $x \in G \setminus \{0\}$ on a :
$$q'(x) < q(x) + k\|x\|^2 \leq 0$$
Donc q' est définie positive (resp. définie négative) sur F (resp. G) donc a même signature que q.

(iii) Il est clair que les $\Omega_i(E)$ forment une partition de $\Omega(E)$. Ils sont de plus ouverts par *(ii)*. Ils ne nous reste plus qu'à montrer qu'ils sont connexes, ce que nous traitons matriciellement ($\Omega(E)$ étant homéomorphe à $GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$) : soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ de signature $(i, n-i)$. Alors, par théorème spectral il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A =^t PD_iP$ et $B =^t QD_iQ$ où $D_i := \mathrm{diag}(\underbrace{1\dots1}_{i}, \underbrace{-1\dots-1}_{n-i})$. Quitte à changer en son opposée la première ligne de P et/ou Q on peut supposer $P, Q \in GL_n^+(\mathbb{R})$ qui est connexe par arc ; donc, si γ y relier P à Q $\delta : t \mapsto^t \gamma(t)D_i\gamma(t)$ relie A à B dans $GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ d'où le résultat.

Détails supplémentaires :
– $GL_n^+(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.* On utilise la décomposition polaire.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 3.* Cassini, 2010.