

Théorème de Brouwer en dimension 2

Arnaud GIRAND

11 décembre 2011

Référence :

- [Rou09], p. 175 – 178

Leçons :

- 204 - Connexité. Exemples et applications.
- 206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Prérequis :

- homotopie dans le plan complexe.

Proposition 1 (Brouwer)

Soit \mathcal{B} la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 .

Alors toute application continue de \mathcal{B} dans elle-même admet un point fixe.

DÉMONSTRATION : Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Supposons que F n'admet aucun point fixe. Pour $x \in \mathcal{B}$ on peut alors noter $G(x)$ le point d'intersection entre la demi-droite d'origine $F(x)$ passant par x et la sphère \mathbb{S}^1 .

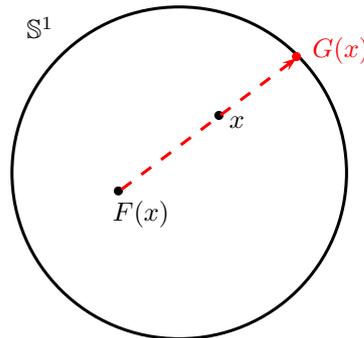


FIGURE 1 – Construction de la fonction G .

Fixons $x \in \mathcal{B}$. Le point $G(x) \in \mathbb{S}^1$ est alors caractérisée par le système d'équation suivant, d'inconnue $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \\ \|G(x)\|^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'équation suivante :

$$\|\lambda(x - F(x)) + F(x)\|^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Ce qui peut se réécrire – en développant – de la façon suivante :

$$P_x(\lambda) = 0 \text{ avec } P_x = \|x - F(x)\|^2 X^2 + 2\langle x - F(x), F(x) \rangle X + \|F(x)\|^2 - 1 \quad (2)$$

Remarquons que :

- $P_x(0) = \|F(x)\|^2 - 1 \leq 0$ car $F(x) \in \mathcal{B}$;
- $P_x(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0$ car $x \in \mathcal{B}$;
- $P_x(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$.

De fait le polynôme du second degré P_x admet deux racines, l'une négative ou nulle et la seconde supérieure ou égale à un. Ces deux racines sont distinctes donc le discriminant de P_x est nécessairement strictement positif, i.e :

$$\Delta(x) := 4\langle x - F(x), F(x) \rangle^2 + 4\|x - F(x)\|^2(1 - \|F(x)\|^2) > 0$$

Si on suppose trouvée une solution λ de (2), il s'agit alors nécessairement de la racine strictement positif de P_x , i.e de :

$$\lambda(x) := \frac{-2\langle x - F(x), F(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - F(x)\|^2} = \frac{-\langle x - F(x), F(x) \rangle + \sqrt{\langle x - F(x), F(x) \rangle^2 + \|x - F(x)\|^2(1 - \|F(x)\|^2)}}{\|x - F(x)\|^2}$$

Réciproquement on vérifie que $\lambda(x)$ est bien une solution strictement positive de (2) et donc $G(x) = \lambda(x)$. De plus si $x \in \mathbb{S}^1$, $P_x(1) = 0$ et donc $\lambda(x) = 1$ et comme $x \mapsto \lambda(x)$ est continue G l'est : on a construit une rétraction¹ de \mathcal{B} sur \mathbb{S}^1 .

Fixons à présent $s \in [0, 1]$ et paramétrons le cercle de centre 0 et de rayon s par l'application suivante :

$$\begin{aligned} x_s : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{B} \\ t &\mapsto (s \cos(2\pi t), s \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

On peut alors définir un lacet² γ_s de \mathcal{B} via $\gamma_s : t \mapsto G \circ x_s(t)$. En particulier, γ_0 est le lacet trivial en $G(0)$ et γ_1 parcourt \mathbb{S}^1 une fois dans le sens direct, i.e³ $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$. Alors :

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)} dt = 0$$

Et :

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}} dt = 1$$

On considère à présent l'application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathcal{B} \\ (s, t) &\mapsto \gamma_s(t) = G \circ x_s(t) \end{aligned}$$

Comme $G(0) \neq 0$ (car $0 \notin \mathbb{S}^1$), cette application est en fait à valeurs dans $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, et transforme continûment γ_0 en γ_1 (car $s \mapsto x_s$ est continue) : ces deux lacets sont donc homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et donc $\text{Ind}_{\gamma_0}(0) = \text{Ind}_{\gamma_1}(0)$, ce qui est absurde. On en déduit qu'il ne peut exister de rétraction de \mathcal{B} sur \mathbb{S}^1 et donc que F admet un point fixe.

Détails supplémentaires :

– Une équivalence d'homotopie entre deux lacets κ et η partant d'un même point $x_0 \in \mathbb{C}$ — i.e vérifiant $\kappa(0) = \eta(0) = x_0$ — est⁴ une application $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- (i) $f(0, \cdot) = \kappa$ et $f(1, \cdot) = \eta$;
- (ii) $\forall t \in [0, 1]$, $f(\cdot, t)$ est continue ;
- (iii) $\forall s \in [0, 1]$, $f(s, \cdot)$ est un lacet partant de x_0 .

Dans le cas de notre application γ , (i) et (ii) sont évidents et (iii) découle du fait que $\forall s \in [0, 1]$, $\gamma_s(0) = G(x_s(0)) = G(0)$.

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*. Cassini, 2009.

1. I.e une application de \mathcal{B} sur \mathbb{S}^1 induisant l'identité sur \mathbb{S}^1 . Vous peinez à visualiser un truc pareil? C'est normal, cela n'existe pas.

2. I.e un chemin continu fermé.

3. Si vous me pardonnez l'identification $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

4. On se place ici dans le cas particulier du plan complexe. La définition se généralise très facilement à tout espace topologique.