

Classification des groupes de pavage du plan

2012-2013

Référence : Rémi Goblot, *Thèmes de géométrie*, Masson, 1998, p.311.

On se place dans P un plan affine euclidien et on considère \vec{P} son plan vectoriel euclidien associé.

Un réseau est un sous-groupe additif $\mathcal{R} \subseteq \vec{P}$ ayant les propriétés :

- \mathcal{R} engendre \vec{P} comme espace vectoriel
- Toute partie bornée de \mathcal{R} est finie.

Proposition.

Les réseaux sont les sous-groupes additifs de \vec{P} de la forme $\mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$, \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

Soit \mathcal{R} un réseau, \vec{u} de norme minimum parmi les vecteurs non nuls de \mathcal{R} , \vec{v} de norme minimum parmi les vecteurs non colinéaires à \vec{u} . Alors $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.

On note $T(P)$ le groupe des translations de P .

Un sous-groupe G de $\text{Isom}(P)$ est un groupe de pavage si $T := G \cap T(P)$ est formé des $t_{\vec{w}}$ où \vec{w} décrit un réseau \mathcal{R} de \vec{P} .

Théorème.

Soit G un groupe de pavage inclus dans $\text{Isom}^+(P)$ (i.e. G est composé de déplacements).

Soit T le sous-groupe des translations de G et \mathcal{R} le réseau associé.

On note \overline{G} le groupe des rotations vectorielles de G .

Alors :

- \overline{G} est cyclique d'ordre $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $G = T \rtimes \overline{G}$

Il y a donc 5 groupes de pavage composés de déplacements à isomorphisme près.

Le produit semi-direct est le même que celui de $\text{Isom}(P)$.

Démonstration. Soit $f \in G$. Pour tout $\vec{w} \in \mathcal{R}$, $ft_{\vec{w}}f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{w})} \in G$, donc $\vec{f}(\vec{w}) \in \mathcal{R}$, donc \mathcal{R} est stable par \vec{f} .

Soit (\vec{u}, \vec{v}) une base de \mathcal{R} . Alors

$$\text{Mat}_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est à coefficients entiers.

Or $f \in \text{Isom}^+(P)$ donc f est une rotation d'angle θ et on a :

$\text{Tr}(f) = a + d = 2 \cos \theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, d'où :

$$\theta \in \left\{ \pi, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0 \right\}$$

Le groupe \overline{G} est donc un groupe de rotations vectorielles fini, donc cyclique d'ordre appartenant à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Décrivons maintenant G en fonction de l'ordre n de \overline{G} . Pour cela, on définit :

$$\mathcal{E} := \left\{ M \in P / r_M := \text{rot} \left(M, \frac{2\pi}{n} \right) \in G \right\}$$

et on va étudier l'action naturelle de T sur \mathcal{E} .

On pose aussi $\overline{G} = \langle r \rangle$ où r est la rotation vectorielle $r := \text{rot} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$.

Si $n = 1$, alors $G = T$. On suppose dorénavant $n > 1$.

Montrons que \mathcal{E} est un réseau affine dont le réseau vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$ est image de \mathcal{R} par l'application linéaire $(\text{id} - r)^{-1}$.

Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. Alors

$$M \in \mathcal{E} \iff r_M \in G \iff t_{\vec{w}} := r_M r_{\Omega}^{-1} \in T$$

Cherchons le lien entre $\overrightarrow{\Omega M}$ et \vec{w} .

On a

$$t_{\vec{w}} r_{\Omega} = r_M = t_{\overrightarrow{\Omega M}} r_{\Omega} t_{\overrightarrow{M \Omega}}$$

L'expression de gauche donne $r_M(\Omega) = \Omega + \vec{w}$.

Soit $N = t_{\overrightarrow{M \Omega}}(\Omega)$ le symétrique de M autour de Ω ,

i.e.

$$r_M(\Omega) = r_{\Omega}(N) + \overrightarrow{\Omega M}$$

Alors

$$r_{\Omega}(N) + \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \vec{w} = r_{\Omega}(\Omega) + \vec{w}$$

D'où

$$\vec{w} = r(\overrightarrow{\Omega N}) + \overrightarrow{\Omega M} = (\text{id} - r)(\overrightarrow{\Omega M})$$

On en déduit

$$M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{\Omega M} = (\text{id} - r)^{-1}(\vec{w})$$

pour un certain $\vec{w} \in \mathcal{R}$.

– Supposons $n = 2$, alors $r = -\text{id}$.

$\vec{\mathcal{E}}$ est donc l'image de \mathcal{R} par l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{2}$.

Il y a ici 4 orbites pour l'action de T : si (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \mathcal{R} , les 4 orbites sont $\Omega + \mathcal{R}$, $\Omega + \frac{1}{2}\vec{u} + \mathcal{R}$, $\Omega + \frac{1}{2}\vec{v} + \mathcal{R}$ et $\Omega + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \mathcal{R}$, où $\Omega \in \mathcal{R}$.

– Supposons $n \in \{3, 4, 6\}$.

Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{R} de norme minimum et $\vec{v} = r(\vec{u})$. Alors $\vec{v} \in \mathcal{R}$ et $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$ donc \vec{v} est aussi de norme minimum non colinéaire à \vec{u} , donc (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \mathcal{R} par la proposition.

On pose $\zeta := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, on a $\zeta \in \{i, j, -j^2\}$.

Prenons la bijection $\mathbb{C} \rightarrow P$ envoyant $0, 1, \zeta$ sur $\Omega, \Omega + \vec{u}, \Omega + \vec{v}$ respectivement. Alors le réseau affine $\Omega + \mathcal{R}$ est formé des points dont l'affixe est dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Le réseau \mathcal{E} est formé des points dont l'affixe est $\frac{z}{1-\zeta}$ où $z \in \mathbb{Z}[\zeta]$ car $(\text{id} - r)^{-1}$ est identifié à $z \mapsto \frac{z}{1-\zeta}$ ici.

On veut maintenant compter le nombre d'orbites pour l'action de T .

Si $n = 6$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1+j^2} = \frac{1}{-j} = -j^2 \in \mathbb{Z}[-j^2]$$

donc $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{R}$ et il n'y a qu'une orbite.

Si $n = 4$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} \notin \mathbb{Z}[i]$$

donc il y a 2 orbites ($2 \cdot \frac{1+i}{2} \in \mathbb{Z}[i]$).

Si $n = 3$,

$$\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{1-j} = \frac{1-j^2}{3} \notin \mathbb{Z}[j]$$

donc il y a 3 orbites. □

Détails supplémentaires

– La deuxième partie de la preuve peut sembler un peu obscure et on comprend mieux ce qu'on fait si on a la représentation graphique en tête. Cette représentation consiste à considérer pour chaque valeur de n un pavage du plan qui est préservé par G . Le dénombrement des orbites de l'action de T sur les centres de rotations de G revient alors à compter le nombre de ces centres de rotations dans chaque parallélogramme porté par les vecteurs de base du réseau associé au pavage.

– *Démonstration de la proposition.*

– Soit (\vec{u}, \vec{v}) une base de \vec{P} et $\mathcal{R} := \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.

Alors \mathcal{R} engendre bien \vec{P} .

Les normes étant équivalentes, on choisit la norme infinie :

$$\|x\vec{u} + y\vec{v}\| = \max(|x|, |y|)$$

Alors toute partie bornée pour cette norme est finie, donc \mathcal{R} est un réseau.

- Soit \mathcal{R} un réseau et $r > 0$ tel que $\{\vec{w} \in \mathcal{R} \setminus \{\vec{0}\} / \|\vec{w}\| \leq r\} \neq \emptyset$.
 Cet ensemble étant fini, il existe \vec{u} dans cet ensemble de norme minimum.
 De même, il existe $\vec{v} \in \mathcal{R}$ de norme minimum parmi les vecteurs non colinéaires à \vec{u} .
 Montrons que $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$.
 Soit $\vec{w} \in \mathcal{R}$, $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$|x - p| \leq \frac{1}{2}, |y - q| \leq \frac{1}{2}$$

Posons

$$\lambda := x - p, \mu := y - q, \vec{W} := \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathcal{R}$$

On a

$$\|\vec{W}\| \leq |\lambda|\|\vec{u}\| + |\mu|\|\vec{v}\|$$

avec égalité si et seulement si $\lambda\vec{u}$ et $\mu\vec{v}$ sont colinéaires, donc si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$.

Donc pour λ, μ non nuls, on a

$$\|\vec{W}\| < |\lambda|\|\vec{u}\| + |\mu|\|\vec{v}\| \leq \frac{1}{2}(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) \leq \|\vec{v}\|$$

Sous ces conditions, \vec{W} doit donc être colinéaire à \vec{u} , ce qui contredit $\mu \neq 0$.
 Donc $\mu = 0$ et $\|\vec{W}\| \leq \frac{1}{2}\|\vec{u}\| < \|\vec{u}\|$, d'où $\lambda = 0$, ce qui conclut la preuve. \square