Inégalités de Kolmogorov

2012-2013

Références : Xavier Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994, p.81
Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas,
Oraux X-ENS, Analyse 1, Cassini, 2003, p.259.

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}), n \geq 2$.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, *on note* $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.
On suppose que M_0 *et* M_n *sont finis.*
Alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ *:*

(i) M_k *est fini*

(ii) $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$

(iii) $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.

Démonstration.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x+k) - f(x) - kf'(x) - \cdots - \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq \frac{k^n M_n}{n!}$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|kf'(x) + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right| &\leq 2M_0 + \frac{k^n M_n}{n!} \\ &\leq 2M_0 + \frac{n^n M_n}{n!}\end{aligned}$$

Si on note $X(x)$ le vecteur colonne de $\mathbb{C}^{n-1}$ dont les composantes sont les $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}$, on en déduit $\|AX(x)\|_\infty \leq K := 2M_0 + \dfrac{n^n M_n}{n!}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

A est inversible car son déterminant est de Vandermonde, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \|X(x)\|_\infty \leq \|A^{-1}\|K$$

Les M_k sont donc finis.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$, par l'inégalité de Taylor-Lagrange on a :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

et :

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

D'où :

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$$

et :

$$2h|f'(x)| \leq h^2 M_2 + |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 M_2 + 2M_0$$

On en déduit $M_1 \leq \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$.

Le membre de droite étant minimal en $h = \sqrt{\dfrac{M_2}{2M_0}}$, on obtient :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

(iii) Montrons le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 2$ et $k = 1$, le résultat a été prouvé en (ii), pour $k = 0$ ou $k = n$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n et considérons f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. En appliquant le cas $n = 2$ à $f^{(k-1)}$, on a :

$$M_k^2 \leq 2M_{k-1}M_{k+1}$$

Par hypothèse de récurrence au rang k, on a :

$$M_{k-1} \leq 2^{\frac{k-1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}}$$

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence au rang $n+1-k$ sur la fonction $f^{(k)}$, on a :

$$M_{k+1} \leq 2^{\frac{n-k}{2}} M_k^{\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}$$

On obtient alors :

$$M_k^2 \leq 2^{\frac{n+1}{2}} M_0^{\frac{1}{k}} M_k^{\frac{k-1}{k}+\frac{n-k}{n+1-k}} M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}$$

En élevant le résultat à la puissance $\dfrac{k(n+1-k)}{n+1}$, on obtient finalement :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

$\square$