101 – Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- *Question.*
  Nombre de matrices de $\mathcal{M}_7(\mathbb{F}_{13})$ de rang 3 ?
  Réponse.
  Une matrice M est de rang 3 si et seulement si M est équivalente à
  $$J_3 := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$
  On regarde l'action de $(GL_7(\mathbb{F}_{13}))^2$ sur $\mathcal{M}_7(\mathbb{F}_{13})$ suivante : $(P,Q)\cdot M = PMQ^{-1}$. Alors
  $$|\mathrm{Orb}(J_3)| = \frac{|(GL_7(\mathbb{F}_{13}))^2|}{|\mathrm{Stab}(J_3)|}.$$
  Or $(P,Q) \in \mathrm{Stab}(J_3) \iff J_3Q = PJ_3$. En écrivant P et Q par blocs et en regardant les choix possibles on peut dénombrer le nombre d'éléments du stabilisateur de J_3.
- *Question.*
  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$ avec q impair. On désigne par D_n le groupe diédral, montrer que D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_q$.
  Réponse.
  $\langle r^q \rangle$ est distingué dans D_n et $\langle r^2, s\rangle$ aussi car $[D_n : \langle r^2, s\rangle] = 2$. De plus, $\langle r^q \rangle \cap \langle r^2, s\rangle = \{e\}$ car q est impair.
  Par ailleurs, $|\langle r^q\rangle| \times |\langle r^2, s\rangle| = 2n = |D_n|$ et $\langle r^2, s\rangle$ est isomorphe à D_q, d'où le résultat.
  Question auxiliaire.
  Quels sont les p-Sylows de D_n dans ce cas ?
  Réponse.
  $2n = 2^2q$ et $2 \wedge q = 1$ donc les 2-Sylows sont d'ordre 4. Il n'y a pas d'éléments d'ordre 4 donc ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce sont les $\langle r^q, r^i s\rangle$ pour i fixé. Les autres p-Sylows sont formés de rotations (ils sont de cardinal impair donc ne contiennent pas de symétrie).

– *Question.*
Exemple d'anneau qui admet un commutant non commutatif ?
Réponse.
Le commutant de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

– *Question.*
Démontrer la formule de Burnside.
Réponse.
On note $F := \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$.
Alors $|F| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$ et $|F| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| &= \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \\
&= \sum_{\omega_x} \sum_{y \in \omega_x} |\mathrm{Stab}(y)| \\
&= \sum_{\omega_x} |\omega_x||\mathrm{Stab(x)}| \\
&= \sum_{\omega_x} |G| \\
&= |G| \times |X/G|
\end{aligned}$$

où $|X/G|$ désigne le nombre d'orbites et ω_x l'orbite de x.

– *Question.*
Que dire des actions libres et transitives ?
Réponse.
Pour $x \in X$,

$$\begin{aligned}
G &\longrightarrow X \\
g &\longmapsto g \cdot x
\end{aligned}$$

est bijectif donc $|G| = |X|$.
On peut donner par exemple les espaces affines, ou l'action de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur les racines primitives n-ièmes de l'unité.
Question.
Montrer que le groupe des homographies agit simplement 3-transitivement sur $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.
Réponse.
L'homographie $z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \times \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$ envoie (α, β, γ) sur $(0, 1, \infty)$. On peut montrer que c'est la seule.