156 – Exponentielle de matrices. Applications.

2013 – 2014

Question.

Préciser pourquoi on peut définir l'exponentielle.

Réponse.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre, on a alors $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ et la série de terme général $\frac{\|A\|^k}{k!}$ est convergente, donc la série définissant l'exponentielle est absolument convergente, donc convergente car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est complet.

Question.

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle dans $\exp(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$?

Réponse.

Non car $\det A < 0$ et $\det(\exp B) = \exp(\operatorname{tr}(B)) > 0$ pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question.

Et pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Réponse.

Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = A$, alors si λ est valeur propre de B, $\exp \lambda$ est valeur propre de A donc $\lambda = i\pi + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda \neq \bar{\lambda}$, or B est réelle donc $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de B, donc B est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable, ce qui est absurde.

Question.

Et pour $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$?

Réponse.

B est conjuguée à $C := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ a + ib &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que l'on prolonge en $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On a alors

$$C = \psi\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Or il existe $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a alors $\psi(X) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\psi(X)^2 = C$.

Question.

Pourquoi une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre strictement positive est l'exponentielle d'une matrice ?

Réponse.

On écrit la décomposition de Dunford de cette matrice : $M = \lambda I + N = \lambda(I + \frac{1}{\lambda}N)$ et $I + \frac{1}{\lambda}N$ est unipotente donc est l'image d'une matrice nilpotente par l'exponentielle.

Question.

Pourquoi l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice ?

Réponse.

$\mathbb{C}[M]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie donc est fermé. Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $X \in \mathbb{C}[M]$,$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} X^n \in \mathbb{C}[M]$, donc $\exp(X) \in \mathbb{C}[M]$.

Question.

Qu'est-ce qu'un groupe topologique admettant des sous-groupe arbitrairement petit ?

Réponse.

Un groupe topologique tel que pour tout voisinage de l'identité il existe un sous-groupe contenu dans ce voisinage.

Question.

Donner des conditions sur A pour que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R} &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

soit fermée.

Réponse.

Il faut regarder le comportement des solutions de l'équation différentielle $Y' = AY$ en fonction des valeurs propres de A.