Sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stables par translations.

2013 – 2014

Référence : Eric Leichtnam, *Exercices d'oraux X-ENS : tome Analyse*, Ellipses, 1999, p.92.

Théorème.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension finie n. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$ endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Alors F est stable par tous les endomorphismes $\tau_a, a \in \mathbb{R}$, si et seulement si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants.

Démonstration. Si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension n d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. De plus, un tel espace est bien stable par translations.

Supposons désormais que F est stable par translations. On commence par montrer que $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\tau_{-a} f_i \in F$ donc il existe des scalaires $\lambda_{i,1}(a), \ldots, \lambda_{i,n}(a)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_i(x+a) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}(a) f_k(x). \tag{1}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\, \mathrm{d}t$. En intégrant (1), on a

$$\int_0^x f_i(t+a)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}(a) F_k(x),$$

d'où

$$F_i(x+a) - F_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}(a) F_k(x).$$

Les f_i sont linéairement indépendants donc les F_i aussi. On dispose alors du lemme suivant :

Lemme.
Soit $h_1, \dots, h_n$ *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *linéairement indépendantes. Alors il existe des réels* $x_1, \dots, x_n$ *tels que la matrice* $(h_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ *soit inversible.*

Soit donc $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $A := (F_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible. Par la relation $F_i(x_j + a) - F_i(x_j) = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}(a) F_k(x_j)$, on obtient $B(a) = \Lambda(a)A$ avec $B(a) := (F_i(x_j + a) - F_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\Lambda(a) := (\lambda_{i,j}(a))_{1 \leq i,j \leq n}$.

On a donc $\Lambda(a) = B(a)A^{-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les f_i sont continues donc les F_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc l'application $a \mapsto B(a)$ aussi. On en déduit que $a \mapsto \Lambda(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que les $\lambda_{i,j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. En prenant $x = 0$ dans (1), on a

$$f_i(a) = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}(a) f_k(0)$$

donc les f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par récurrence, on en déduit que les f_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

En dérivant (1) par rapport à a en 0, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_i'(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}'(0) f_k(x).$$

On en déduit $f_i' \in F$ pour tout i, *i.e.* F est stable par l'endomorphisme D de dérivation.
Soit μ le polynôme minimal de $D_{|F}$, on note $d := \deg \mu$ ($d \leq n$). On a $F \subset \ker \mu(D)$, or d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $\ker \mu(D)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension d, on doit donc avoir $d = n$ et donc $F = \ker \mu(D)$. □

Démonstration du lemme. On note $V := \mathrm{vect}(h_1, \dots, h_n)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, δ_x la forme linéaire $f \mapsto f(x)$. Soit $\Gamma := \{\delta_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G := \mathrm{vect}_{K^*}(\Gamma)$. On a $G^{\perp_K} = \Gamma^{\perp_K} = \{0\}$, donc $G = K^*$.

On en déduit que Γ engendre G, et donc qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ soit une base de K^*. La matrice de passage de la base duale des h_i à la base des δ_{x_i} est $(h_i^{**}(\delta_{x_j}))_{1 \leq i,j \leq n}$, or $h_i^{**}(\delta_{x_j}) = \delta_{x_j}(h_i) = h_i(x_j)$, d'où le résultat. □