Formule d'inversion de Fourier.

2013 – 2014

Référence : Marc Briane, Gilles Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006, p.279.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On donne aussi la définition d'une approximation de l'unité :

Définition. Une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si elle vérifie

(i) pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_n = 1$,

(ii) $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| < +\infty$,

(iii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|\geq\varepsilon} \alpha_n = 0$.

On rappelle le théorème suivant :

Théorème.
Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall n \geq 1, \quad f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f.$$

Le résultat à démontrer est le suivant :

Théorème.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Démonstration. On pose

$$a_n(x) := \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{n}}$$

et on introduit $\alpha_n := \widehat{a_n}$. Montrons que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité.

$$\begin{aligned}
\alpha_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{n}-itx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\frac{x}{n}-itx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}-itx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}-itx}}{\frac{1}{n}-it}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}-itx}}{-\frac{1}{n}-it}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}-it}+\frac{1}{\frac{1}{n}+it}\right) \\
&= \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+(nt)^2}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\varepsilon} \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{n}{\pi}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{1+(nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{|x|\geq n\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n\varepsilon)+\arctan(-n\varepsilon)+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1-\frac{2}{\pi}\arctan(n\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est donc une approximation de l'unité. On a alors

$$\begin{aligned}
\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} a_n(u)\mathrm{e}^{-iu(x-t)}\,\mathrm{d}u f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_n(u)\mathrm{e}^{-iux}\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{iut}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini, car $|a_n(u)\mathrm{e}^{-iu(x-t)}f(t)| = |a_n(u)f(t)|$ est intégrable pour la mesure produit $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli.

On en déduit, par parité de a_n,

$$\begin{aligned}\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) \mathrm{e}^{iux} \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{e}^{-iut} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) \mathrm{e}^{iux} \hat{f}(u) \,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or $|a_n(u)\mathrm{e}^{iux}\hat{f}(u)| \leq |\hat{f}(u)| \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n(u) = \frac{1}{2\pi}$ pour tout u. En appliquant le théorème de convergence dominée on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \mathrm{e}^{iux} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-x).$$

Par ailleurs, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et (α_n) est une approximation de l'unité donc $\lim_{n\to+\infty} \|\alpha_n * f - f\|_1 = 0$. D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une sous-suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ telle que $\alpha_{\varphi(n)} * f$ converge presque partout vers f. D'où $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ presque partout. $\square$