

Formule d'inversion de Fourier.

2013 – 2014

Référence : Marc Briane, Gilles Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006, p.279.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx.$$

On donne aussi la définition d'une approximation de l'unité :

Définition. Une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si elle vérifie

- (i) pour tout $n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha_n = 1$,
- (ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n| < +\infty$,
- (iii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \varepsilon} \alpha_n = 0$.

On rappelle le théorème suivant :

Théorème.

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall n \geq 1, \quad f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f.$$

Le résultat à démontrer est le suivant :

Théorème.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x).$$

Démonstration. On pose

$$a_n(x) := \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|x|}{n}}$$

et on introduit $\alpha_n := \widehat{a_n}$. Montrons que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité.

$$\begin{aligned}
\alpha_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{n} - itx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{n} - itx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{n} - itx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\frac{x}{n} - itx}}{\frac{1}{n} - it} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-\frac{x}{n} - itx}}{-\frac{1}{n} - it} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\frac{1}{n} - it} + \frac{1}{\frac{1}{n} + it} \right) \\
&= \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + (nt)^2}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t) dt &= \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + (nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + u^2} = 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|t| \geq \varepsilon} \alpha_n(t) dt &= \frac{n}{\pi} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{dt}{1 + (nt)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq n\varepsilon} \frac{du}{1 + u^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n\varepsilon) + \arctan(-n\varepsilon) + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(n\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

$(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est donc une approximation de l'unité. On a alors

$$\begin{aligned}
\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(x-t) f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{-iu(x-t)} du f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{-iux} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{iut} dt du
\end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini, car $|a_n(u) e^{-iu(x-t)} f(t)| = |a_n(u) f(t)|$ est intégrable pour la mesure produit $dt du$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli.

On en déduit, par parité de a_n ,

$$\begin{aligned}\alpha_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{iux} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-iut} dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}} a_n(u) e^{iux} \hat{f}(u) du.\end{aligned}$$

Or $|a_n(u) e^{iux} \hat{f}(u)| \leq |\hat{f}(u)| \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(u) = \frac{1}{2\pi}$ pour tout u . En appliquant le théorème de convergence dominée on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n * f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) e^{iux} du = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x).$$

Par ailleurs, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et (α_n) est une approximation de l'unité donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\alpha_n * f - f\|_1 = 0$. D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une sous-suite $(\alpha_{\varphi(n)})$ telle que $\alpha_{\varphi(n)} * f$ converge presque partout vers f . D'où $f = \hat{f}(\cdot)$ presque partout. \square