

# Inégalité isopérimétrique

2013 – 2014

## **Théorème.**

Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe simple fermée de classe  $\mathcal{C}^1$ , de longueur  $L$  et enfermant une surface  $S$ . Alors

$$L^2 \geq 4\pi S$$

et  $L^2 = 4\pi S$  si et seulement si  $\gamma$  définit un cercle parcouru une fois.

*Démonstration.* On commence par quelques simplifications. On peut déjà supposer sans perdre en généralité que  $L = 1$ .

Montrons maintenant que l'on peut se ramener au cas où  $|\gamma'(t)| = 1$  pour tout  $t$ . Pour  $t \in [a, b]$ , on définit l'abscisse curviligne de  $\gamma$  par

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| \, du.$$

$\gamma'$  est continue et on peut supposer que  $\gamma'$  ne s'annule sur aucun intervalle, donc  $s$  est strictement croissante, il s'agit donc d'une bijection de  $[a, b]$  dans  $[0, 1]$  (car  $s(b) = L = 1$ ). On note  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}$ , alors

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= (s^{-1})'(t) \gamma'(s^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \gamma'(s^{-1}(t)) \\ &= \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{|\gamma'(s^{-1}(t))|}. \end{aligned}$$

On a donc  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$  pour tout  $t$ . De plus, pour  $t < u$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(u) &\iff \gamma(s^{-1}(t)) = \gamma(s^{-1}(u)) \\ &\iff s^{-1}(t) = a \text{ et } s^{-1}(u) = b \quad \text{car } \gamma \text{ est simple et fermée} \\ &\iff t = s(a) = 0 \text{ et } u = s(b) = 1. \end{aligned}$$

Finalement,  $\tilde{\gamma}$  est une courbe simple fermée de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , vérifiant  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$  pour tout  $t$  et de même support que  $\gamma$ . On peut donc supposer que  $\gamma$  vérifie les propriétés de  $\tilde{\gamma}$ .

Par ailleurs, quitte à remplacer  $\gamma$  par  $\gamma(1 - \cdot)$ , on peut supposer que  $\gamma$  est positivement orientée.

On peut maintenant prouver le théorème. Pour calculer  $S$ , on utilise la formule de Green-Riemann qui s'écrit, si le domaine  $A$  enfermé par  $\gamma$  est vue dans  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\int \int_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

En particulier, si on prend  $Q : (x, y) \mapsto \frac{x}{2}$  et  $P : (x, y) \mapsto -\frac{y}{2}$ , on a  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$  donc

$$\int \int_A dx dy = S = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt,$$

où  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . On en déduit

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^1 \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt.$$

Donnons désormais une expression de  $L$ . On a

$$L = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt.$$

On souhaite maintenant utiliser la formule de Parseval sur  $\gamma'$ . Pour cela, remarquons, puisque  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , que l'on peut prolonger  $\gamma$  en une fonction 1-périodique continue de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , que l'on note toujours  $\gamma$ . En appliquant la formule de Parseval à  $\gamma'$  (qui est continue sur  $[0, 1]$  donc  $L^2$ ), on obtient alors, si  $c_n$  désignent les coefficients de Fourier,

$$L = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\gamma')|^2 = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\gamma)|^2$$

car  $c_n(\gamma') = 2i\pi n c_n(\gamma)$ .

Par ailleurs, la formule de Parseval donne aussi

$$\int_0^1 \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\gamma') \overline{c_n(\gamma)} = 2i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(\gamma)|^2.$$

On en déduit

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_a^b \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(\gamma)|^2.$$

D'où

$$L - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 - n) |c_n(\gamma)|^2 \geq 0.$$

Par ailleurs, pour tout  $n$  différent de 0 et 1,  $n^2 - n > 0$  donc  $L = 2\pi S$  si et seulement si  $c_n(\gamma) = 0$  pour  $n$  différent de 0 et 1, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = c_0(\gamma) + c_1(\gamma) e^{2i\pi t},$$

ce qui est une paramétrisation du cercle de centre  $c_0(\gamma)$  et de rayon  $|c_1(\gamma)|$ .  $\square$

## Références

- [1] Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2007, page 103.