171 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications

I. Forme quadratique et algèbre bilinéaire

1) Définitions et premières propriétés ([GOU1] p 227-231)

Def 1 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et une application $\varphi : E\times F \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \varphi(x,y)$.
On dit que φ est bilinéaire si :
- $\forall x\in E$, $y\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
- $\forall y\in E$, $x\mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

De plus, φ est symétrique si $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$

Def 2 : On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme $q : \begin{array}{l} E\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \varphi(x,x)\end{array}$ où φ est une forme bilinéaire symétrique

Ex 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z)=3x^2+y^2+2xy-3xz$ est une forme quadratique.
En dimension infinie, $q : \mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ définie par $q(P)=\int_0^1 P(x)P''(x)dx$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$. ([GRIF] p 319)

Prop 4 : Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x\in E$, $q(x)=\varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q.

Prop 5 : Identités de polarisation : Soit φ la forme polaire associée à la forme quadratique q alors on a :
- $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)]$
- $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[q(x+y)-q(x-y)]$

Ex 6 : - Le produit scalaire dans un espace euclidien avec pour forme quadratique associée : $\|\ \|^2$
- Si $q : \begin{array}{l}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R} \\ A\mapsto tr({}^tAA)\end{array}$ alors $\varphi(A,B)=tr({}^tAB)$

Ecriture en dimension finie : Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, on a $\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\varphi(e_i,e_j)={}^tXMY$ avec $M=(\varphi(e_i,e_j))\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Def 7 : Soit q une forme quadratique sur E de dimension finie et B une base de E. On appelle matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B : $M=(\varphi(e_i,e_j))_{i,j}$ avec $B=(e_i)_i$. Le rang de q est le rang de cette matrice.

Rmq : Le rang de q est aussi le rang de sa forme polaire

Ex 8 : On reprend l'exemple 3, la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix}3 & 1 & -3/2\\ 1 & 1 & 0\\ -3/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ de rang 3 donc q est de rang 3

Changement de base. Soit E de dim finie n. Soient B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B' ($P=Mat_B(B')$), $M=mat_B(\varphi)$, $M'=mat_{B'}(\varphi)$ alors $M'={}^tPMP$

Déf 9 On appelle noyau de q le s.e.v de E noté $Ker(q)$ défini par $Ker(q)=\{x\in E / \forall y\in E, \varphi(x,y)=0\}$ avec φ la forme polaire de q.
La forme q est dite non-dégénérée si $Ker(q)=\{0\}$, dégénérée si $Ker(q)\neq\{0\}$.

Rmq : $\det(M)\neq 0 \Leftrightarrow$ q est non dégénérée où M est la matrice associée à la forme quadratique q.

2) Formes quadratiques positives, définies positives ([GOU1] p230-235)

Def 10 Soit q une forme quadratique. On dit que q est définie si $q(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Def 11 : q est positive si $\forall x\in E$, $q(x)\geq 0$

Rmq : q est définie positive si $\forall x\neq 0$, $q(x)>0$

Ex 12 : $q_1(A)=(tr(A))^2$ est positive mais non définie car $q_1\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$

Prop 13 : Si q est définie alors q est non dégénérée

Rmq : La réciproque est fausse. $q(x,y)=x^2-y^2$ est non dégénérée mais q n'est pas définie car $q(x,x)=0$, $\forall x\in E$.

Thm 14 : Inégalité de Schwarz :
Si q est positive alors $\forall (x,y)\in E^2$, $|q(x,y)|^2\leq q(x)q(y)$
Si de plus, q est définie, il y a égalité ssi x et y sont liés

Cor 15 : Inégalité de Minkowsky :
Si q est positive alors $\forall (x,y)\in E^2$, $\sqrt{q(x+y)}\leq\sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)}$

II. Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité ([GOU1] p 230-233)

Def 16 : Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux selon q si $\varphi(x,y)=0$
- Soit $A\subset E$. On appelle orthogonal de A selon q l'ensemble $A^\perp=\{y\in E / \forall x\in A, \varphi(x,y)=0\}$
- Deux sous-ensembles A et B de E sont orthogonaux selon q si $\forall x\in A, \forall y\in B$, $\varphi(x,y)=0$. On note $A\perp B$.

Prop 17
- si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de E
- $Ker(q) = E^\perp$
- Si $F \subset E$, $F \subset F^{\perp\perp}$
- Si $A \subset B \subset E$, $B^\perp \subset A^\perp$

Def 18 : Une base $\mathcal{B}$ est dite q-orthogonale si $\forall e_i \neq e_j \in \mathcal{B}$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Thm 19 : Si E est de dimension finie, il existe une base q-orthogonale de E. On a alors si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est q-orthogonale alors $\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n$ $q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$. La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Rmq : Il ne faut pas confondre la recherche d'une base orthogonale où on veut que ${}^tPAP$ soit diagonale avec la diagonalisation des endomorphismes où on veut que $P^{-1}AP$ soit diagonale avec $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. ([GRIF] p305)

Prop 20 : Si E est de dim finie : Tout sev F de E vérifie
$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim(F \cap Ker(q))$

Rmq : Si q est non-dégénérée, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$

2) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique ([GRIF] p315-317)

But : Etudier les endomorphismes f de E qui conservent une forme quadratique q, c'est à dire tels que $q(f(x)) = q(x)$, $\forall x \in E$.

Def/Prop 21 : E de dim finie, q une forme quadratique non dégénérée sur E, $f \in End(E)$. Il existe alors un et un seul endomorphisme f^* de E tel que $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y))$, $\forall x, y \in E$ où φ est la forme polaire de q. f^* est dit adjoint de f relativement à φ.

Rmq Ecriture matricielle : Si $M = (\varphi(e_i, e_j))_{ij}$ et $A = Mat_{(e_i)}(f)$ alors $A^* = M^{-1}\,{}^tA\,M$

Ex 22 : Si $E = \mathbb{R}^2$ muni de $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $A = M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors
$A^* = M^{-1}\,{}^tA\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$

Prop 23 : E ev de dim finie, q non-dégénérée. On a équivalence entre :
1) $q(f(x)) = q(x)$, $\forall x \in E$
2) $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$, $\forall x, y \in E$
3) $f^* \circ f = id$ (en particulier f est bijectif)

Un tel endomorphisme est dit orthogonal relativement à q.

Prop 24 : Soit $O(q) = \{f \in End(E) \mid f^* \circ f = id\}$, On a :
1) $id \in O(q)$
2) si $f, g \in O(q)$ alors $f \circ g \in O(q)$
3) si $f \in O(q)$ alors $f^{-1} \in O(q)$

En particulier, $O(q)$ est un groupe pour $\circ$ dit groupe orthogonal de q.

Prop 25 $B = (e_i)$: base de E, $M = Mat_{(e_i)}(q)$ et $A = Mat_{(e_i)}(f)$ alors
$f \in O(q) \iff {}^tAMA = M$

Ex 26 : Soit $q(x) = 2x_1x_2$ dans $\mathbb{R}^2$ alors $O(q) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^*\}$

3) Isotropie ([GRIF] p302, 303, 312, 321)

Def 27 : Soit q une forme quadratique sur E. On appelle cône isotropique l'ensemble $I(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$

Ex 28 : $E = \mathbb{R}^2$, $q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$, on a $I(q_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$
$E = \mathbb{R}^3$, $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $I(q_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ (voir annexe)

Prop 29 : On a $Ker(q) \subset I(q)$

Def 30 : Un sous-ev F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

Rmq : Il existe des sous-espaces isotropes ssi $I(q) \neq \{0\}$

Def 31 : Un sev F de E est dit totalement isotrope si $\varphi_{|F} = 0$ avec φ la forme polaire de q.

Rmq : F est totalement isotrope $\iff F \subset I(q) \iff F \subset F^\perp$

Ex 32 : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $F = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ totalement isotrope et non inclus dans le noyau

III. Réduction des formes quadratiques

1) Réduction simultanée ([AUD] p271, [FGN] p222, 229)

Thm 33 : Si q est une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique quelconque alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.

Appli 34 : Convexité logarithmique du déterminant dans S_n^{++}
$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $A, B \in S_n^{++}$

Appli 35 : Ellipsoïde de John-Loewner $\boxed{\text{DEV 1}}$

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

2) Théorème de Sylvester ([GRIF] p306-310)

Méthode de Gauss : Pour toute forme quadratique q, il existe $r = rg(q)$ formes linéaires indépendantes $l_1, \dots, l_r$ telles que
$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i^2 \quad , a_i \in \mathbb{R}.$$
On utilise $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $xy = \frac{1}{4}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right)$

Ex 36 : Dans $\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 - \frac{z^2}{8}$

Thm 37 : Théorème de Sylvester. Soit E un ev de dim n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base $\{e_i\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ où $r = rg(q)$

ie $mat_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_{r-p} & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$

Def 38 : Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q noté $sign(q)$.

Ex 39 : $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$
$q(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + (\sqrt{8}x_3)^2 - (\sqrt{2}(x_2 - x_3))^2$ donc $sign(q) = (2,1)$

Ex 40 : Soit q une forme quadratique sur un ev E de dim n sur $\mathbb{R}$. Alors q est
- définie positive $\Leftrightarrow sign(q) = (n,0)$
- définie négative $\Leftrightarrow sign(q) = (0,n)$
- non dégénérée $\Leftrightarrow sign(q) = (p, n-p)$

IV. Applications à la géométrie

1) Classification euclidienne des coniques ([GRIF] p413-414)

Def 41 : Soient q une forme quadratique non nulle et l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. On appelle conique l'ensemble $\mathscr{C}$ des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation
$(*)$ $q(x,y) + l(x,y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$

On peut classer les coniques selon la signature de q. En changeant éventuellement le signe des deux membres, on peut supposer $sign(q)$ est $(2,0)$, $(1,1)$ ou $(1,0)$.

On peut réécrire $(*)$ comme $aX^2 + bY^2 - 2rX - 2sY = k$

Thm 42 : Soit $\mathscr{C}$ une conique $\neq \emptyset$ et qui ne se réduit pas à un point. Alors
1) Si $sign(q) = (2,0)$ alors $\mathscr{C}$ est une ellipse car avec $x = X - \frac{r}{a}$ et $y = Y - \frac{s}{b}$, on a $ax^2 + by^2 = h$, avec $a>0$ et $b>0$ car $sign(q) = (2,0)$
2) Si $sign(q) = (1,1)$ alors $\mathscr{C}$ est une hyperbole éventuellement dégénérée en 2 droites sécantes. $ab<0$ par ex $a>0$, $b<0$, on a $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ avec $A = \sqrt{h/a}$ et $B = \sqrt{-h/b}$
3) Si $sign(q) = (1,0)$ alors $\mathscr{C}$ est une parabole qui peut dégénérer en une droite ou en deux droites parallèles car :
dans ce cas $ab = 0$ par ex $a \neq 0$ et $b = 0$, $a\left(X - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sY = h$
donc $y = ax^2$ avec $x = X - \frac{r}{a}$ et $y = h + 2sY$ si $s \neq 0$
sinon $a\left(X - \frac{r}{a}\right)^2 = 0$: une ou deux droites parallèles.

2) Classification euclidienne des quadriques ([GRIF] p415-420)

Def 42 : q une forme quadratique $\neq 0$ et l forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On appelle quadrique l'ensemble Q des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $q(x,y,z) + l(x,y,z) = k \in \mathbb{R}$

Th 43 Soit Q une quadrique $\neq \emptyset$ et non-réduite à un point.
1) $rg(q) = 3$
   a) si $sign(q) = (3,0)$, Q est un ellipsoïde
   b) si $sign(q) = (2,1)$, Q est un hyperboloïde à une nappe ou un cône ou un hyperboloïde à deux nappes
2) $rg(q) = 2$
   a) si $sign(q) = (2,0)$, Q est un paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique
   b) si $sign(q) = (1,1)$, Q est un paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique
3) $rg(q) = 1$ $sign(q) = (1,0)$, Q est un cylindre parabolique ou deux plans parallèles.

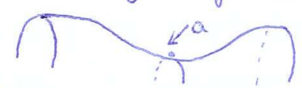
3) Géométrie différentielle ([GOU2] p316, [ROUV] p354)

Def 44 Un point a pour lequel $Df(a) = 0$ est appelé un point critique de f.

Prop 45 : La hessienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ en un point a est $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$
C'est la matrice d'une forme quadratique $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Prop 46 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. On note q la forme quadratique associée à la hessienne de f en a :
1) Si q est définie positive/négative alors f admet un minimum/maximum relatif en a

2) Si q n'est ni positive, ni négative, f n'admet pas d'extremum relatif en a



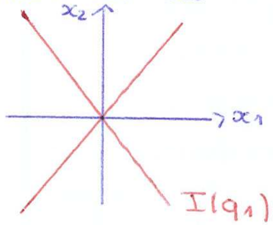
Thm 47 : Lemme de Morse : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}^3$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Si $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ non-dégénérée avec $sign(D^2f(0)) = (p, n-p)$ alors il existe φ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ où $u = \varphi(x)$.

DEV 2

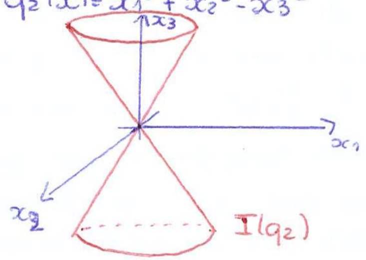
Annexe

* Cônes isotropiques de :

$q_1(x) = x_1^2 - x_2^2$



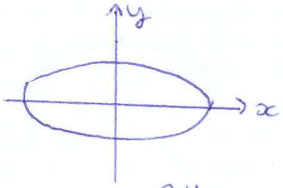
$q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$



* Coniques

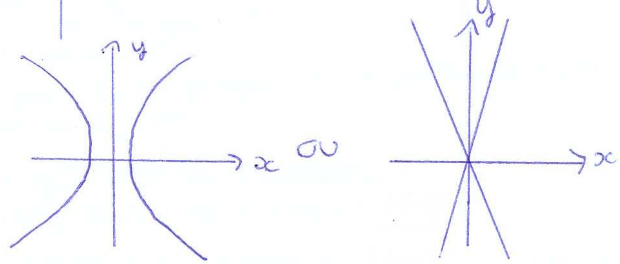
- sign(q) = (2,0)

  ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$



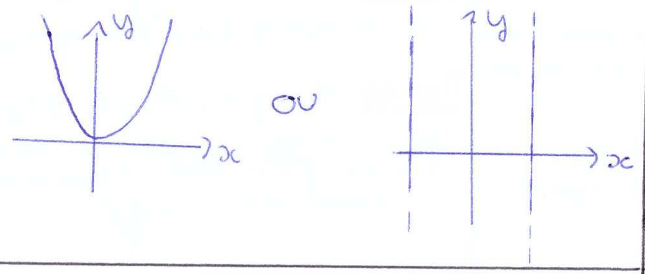
- sign(q) = (1,1)

  hyperbole $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$



- sign(q) = (1,0)

  parabole $y = ax^2$



REFERENCES

[GOU 1] : Gourdon "Algèbre" 2e édition

[GOU 2] : Gourdon "Analyse" 2e édition

[GRIF] : Grifone "Algèbre linéaire" 4e édition

[AUD] : Audin "Géométrie"

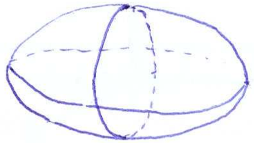
Pour les développements :

[FGN] : "Oraux X-ENS Algèbre 3" Francinou, Gianella, Nicolas

[ROUV] : Rouvière "Petit guide du calcul différentiel, ..."

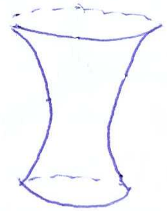
* Quadriques

rg(q) = 3 ↳ sign(q) = (3,0)
ellipsoïde

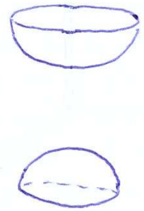


↳ sign(q) = (2,1)

cône



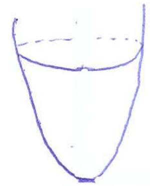
hyperboloïde à une nappe



hyperboloïde à 2 nappes

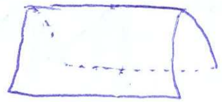
rg(q) = 2 ↳ sign(q) = (2,0)

cylindre elliptique



paraboloïde elliptique

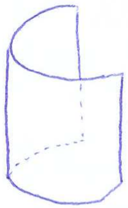
↳ sign(q) = (1,1)



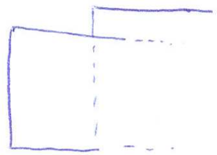
cylindre hyperbolique

paraboloïde hyperbolique

rg(q) = 1 sign(q) = (1,0)



cylindre parabolique



deux plans parallèles