107 — REPRESENTATIONS ET CARACTERES D'UN GROUPE FINI SUR UN $\mathbb{C}$-ESPACE VECTORIEL.

<u>CADRE</u> : Dans toute cette leçon, on considère des groupes finis et des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit donc G un groupe fini d'élément neutre e.

I/ Représentation d'un groupe fini.

A) Définitions et premiers exemples

[COLM] p. 235

<u>Déf</u> : Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors une représentation de G sur V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$, $g \mapsto \rho_g$ appelé morphisme de représentation.

<u>Rem</u> : • Il s'agit en fait d'une action de G sur V qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel de V. En particulier, cela implique le fait que : $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ pour tous $g, h \in G$ car l'action est donnée par $g \cdot v := \rho_g(v)$.

• Dans la suite, on dira de même selon les commodités que ρ ou que V est une représentation du groupe G.

<u>Déf</u> : On appelle degré d'une représentation V de G la dimension de V vu comme espace vectoriel. [COLM] p. 244 et [PEYR] p. 192

<u>Déf</u> : Deux représentations V_1 et V_2 de G sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme linéaire $u : V_1 \to V_2$ qui commute à l'action de G, c'est-à-dire que si ρ_1 et ρ_2 sont les morphismes de représentations associées à V_1 et V_2, alors u doit vérifier $u \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ u$ pour tout $g \in G$.

<u>Rem</u> : Deux représentations isomorphes ont nécessairement le même degré.

<u>Ex</u> : • La <u>représentation triviale</u> $\rho : G \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto id$ (c'est de degré 1)

• La <u>représentation régulière</u> est la représentation donnée par l'action de translation de G sur G ($(g,h) \in G \times G \mapsto gh \in G$). Cela revient à se donner un espace vectoriel V de dimension $|G|$ et une base $(e_i)_{i\in G}$ de V indicée par G et à définir le morphisme ρ qui pour tout $g \in G$ associe l'automorphisme linéaire qui pour tout $h \in G$ envoie e_h sur e_{gh}. [COLM] p. 239

• La représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et d'un élément $u \in GL(V)$ vérifiant $u^n = id$. [COLM] p. 235

B) Sous-représentations et opérations sur les représentations

<u>Prop & déf</u> : Soit V une représentation de G de morphisme de représentation ρ. Si W est un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G, alors $\rho^W : G \to GL(W)$, $g \mapsto \rho(g)_{|W}$ est une représentation appelée sous-représentation de G. [COLM] p. 241 et [PEYR] p. 192

<u>Ex</u> : $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$ est une sous-représentation de la représentation régulière qui est isomorphe à la représentation triviale.

<u>Déf</u> : Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit la représentation somme $\rho_{V\oplus W}$ sur $V \oplus W$ par : [PEYR] p. 196

$\forall g \in G, \forall (v,w) \in V \times W$, $\rho_{V\oplus W}(g)(v,w) := \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$

<u>Déf</u> : Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit la représentation des morphismes $\rho_{L(V,W)}$ sur l'espace $L(V,W)$ par : [PEYR] p. 196

$\forall g \in G, \forall f \in L(V,W)$, $\rho_{L(V,W)}(g)(f) := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$

C) Représentations irréductibles

<u>Déf</u> : Une représentation V de G est dite irréductible si V ne possède pas de sous-représentation autre que V et $\{0\}$. [PEYR] p. 199

<u>Rem</u> : Une représentation de degré 1 est irréductible ; en particulier, la représentation triviale est irréductible.

THM (Maschke) : Toute sous-représentation admet un supplémentaire.

[COLM] p.244 Cor : toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles. *

[COLM] p.244 THM (lemme de Schur) : Soit G un groupe et soient V_1 et V_2 deux représentations irréductibles de G.
(i) Si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes alors $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$
(ii) Si $V_1 = V_2$, alors $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ est la droite des homothéties

II / Théorie des caractères

A) Définition et premières propriétés et exemples

[COLM] p.237 Déf. Le caractère d'une représentation V portée par ρ_V est l'application $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$g \longmapsto \mathrm{tr}(\rho_V(g))$$

Rem : On a en particulier $\chi_V(e) = \mathrm{tr}(id) = \dim(V)$.

Ex : • Si ρ_V est une représentation de degré 1, alors $\chi_V = \rho_V$

[COLM] p.239 • Représentation de permutation : Si X est un G-ensemble fini muni de l'action $(g,x) \mapsto g\cdot x$, on définit la représentation V_X de degré $|X|$ par l'action linéaire de G sur les vecteurs de la base $(e_x)_{x\in X}$ de V_X donnée par $g \cdot e_x = e_{g\cdot x}$. Le caractère de cette représentation est donné par : $\chi_{V_X}(g) = \#\{x \in X : g\cdot x = x\}$

• En particulier, le caractère de la représentation régulière V_G de G est donné par $\chi_{V_G}(e) = |G|$ et $\chi_{V_G}(g) = 0$ si $g \in G\setminus\{e\}$.

[COLM] p.240 * : Rem : Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G, notons $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ l'ens. des applications linéaires de V_1 dans V_2 qui commute avec l'action de G. Si $f \in L(V_1, V_2)$, alors $f \in \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ ssi $g\cdot f(v) = f(g\cdot v)$, $\forall g \in G$, $\forall v \in V_1$.

Prop : Soit V une représentation du groupe G. [COLM] p.237-238
(i) Pour tout $g \in G$, on a $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
(ii) Pour tous $g, h \in G$, on a $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$.

Prop : Soient V_1 et V_2 de représentations du groupe G. [COLM] p.239
(i) $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$
(ii) $\chi_{L(V_1,V_2)}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)}\,\chi_{V_2}(g)$, pour tout élément $g \in G$. [COLM] p.240

B) Caractères irréductibles et orthogonalité.

Déf : Un caractère est dit irréductible s'il est le caractère d'une représentation irréductible. [COLM] p.246

Déf : Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle est constante sur chaque classe de conjugaison de G, autrement dit si elle vérifie $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$ pour tous $g, h \in G$.

Rem : Les caractères sont des fonctions centrales.

Prop : Si on note $R_C(G)$ l'espace vectoriel des fonctions centrales (cen est un), alors l'application $\langle , \rangle$ qui à $\varphi_1, \varphi_2 \in R_C(G)$ associe $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\varphi_1(g)}\,\varphi_2(g)$ est un produit scalaire hermitien sur $R_C(G)$. [COLM] p.246

THM (Frobenius) : Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace $R_C(G)$ des fonctions centrales. [COLM] p.246

Cor : Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G. Il est donc fini. [COLM] p.247

Cor : Si $\mathrm{Irr}(G)$ désigne l'ensemble des représentations irréductibles de G, alors toute représentation V de G se décompose de la façon suivante : [COLM] p.248
$V = \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}(G)} W^{\langle \chi_V, \chi_W \rangle}$.

Prop : Deux représentations ayant le même caractère sont isomorphes. [COLM] p.248

C) Table de caractères d'un groupe fini

[PEYR] p.[illegible]

Déf. La table de caractères de G est défini comme étant le tableau qui donne les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaison de G : en lignes on a les caractères et en colonnes les classes de conjugaison.

[COLM] p.253

Ex: La table du groupe multiplicatif $\{1,-1\}$ est donnée par : —

	1	-1
1	1	1
χ	1	-1

Prop: On note encore ici $\mathrm{Irr}(G)$ l'ens. des représentations irr de G.
(i) (formule de Burnside) On a $\sum_{W\in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$
(ii) Si $g\in G\setminus\{e\}$, on a alors $\sum_{W\in\mathrm{Irr}(G)} \dim(W)\,\chi_W(g) = 0$

[PEYR] p 228, 229 et 239

Ex: • Table de $\mathfrak{S}_4$ $\boxed{\text{DVP}}$

	$\overset{1}{id}$	$\overset{6}{[2\,1\,1]}$	$\overset{8}{[3\,1]}$	$\overset{6}{[4]}$	$\overset{3}{[2\,2]}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

• Table de Q_8

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{j,-j\}$	$\{k,-k\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

III/ Le cas des groupes abéliens.

A) Caractères d'un groupe abélien.

[COLM] p.249

Prop: Si G est un groupe abélien, alors toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1. (réc)

[PEYR] p 4

Ex: Si G est un groupe cyclique engendré par $g\in G$ ($G=\langle g\rangle$), alors les caractères irréductibles de G sont les χ_j tels que $\chi_j(g)=\omega_n^j$ pour $j\in[\![0;n-1]\!]$ avec $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

B) Dual d'un groupe fini

[PEYR] p.2

Déf & prop: Le dual du groupe fini G est l'ensemble noté $\hat G$ est l'ensemble des caractères de G. C'est un groupe pour la multiplication des applications que l'on appelle groupe dual de G.

[PEYR] p.4

Prop: Si G est un groupe cyclique, on a alors un isomorphisme de groupes entre G et son dual : $G\simeq\hat G$.

$\boxed{\text{DVP}}$

Prop: Si G est abélien et si H est un sous-groupe de G, alors tout caractère χ de H peut être prolongé en un carac. de G.

[PEYR] p.67

Prop: Si G est abélien, alors G et $\hat G$ ont le même ordre

[PEYR] p.8

THM (structure des groupes abéliens finis): Si G est un groupe abélien fini, il existe alors des entiers strictement positifs $m_1,\dots,m_r$ uniquement déterminés tels que m_k divise m_{k+1} pour tout $k\in[\![1,r-1]\!]$ et tels que l'on ait l'isomorphisme : $G\simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}\times\dots\times\mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$.

[PEYR] p.8

THM: Si G est un groupe abélien fini, alors il existe un isomorphisme de groupes entre G et son dual : $G\simeq\hat G$.
↳ ce résultat est appelé *théorème d'isomorphisme*

C) Notion de bidual d'un groupe fini abélien

[PEYR] p.8

Déf. Le bidual de G est défini comme le dual du groupe dual de G. On le note $\hat{\hat G}$

Rem: Le bidual est bien défini d'après le théorème d'isomorphisme.

[PEYR] p.9

Prop: On a un isomorphisme canonique entre G et $\hat{\hat G}$ (dans le cas où G est abélien) qui est donné par l'application

$$\Phi : G \longrightarrow \hat{\hat G}$$
$$g \longmapsto (\Phi_g : \chi \mapsto \chi(g))$$