234 — Espaces $\mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq +\infty$

<u>Cadre</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Définitions et premières propriétés

1) Espaces $\mathcal{L}^p$

Déf 1. Pour tout réel $p > 0$, on définit :
$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurable} \,/\, \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$
On note $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

- Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$. On définit le supremum essentiel de f par :
$$\operatorname{supess}(f) := \inf \{ M > 0 \,/\, \mu(\{f > M\}) = 0 \}$$

Pour $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{K}$, on pose $\|f\|_\infty := \operatorname{supess}(|f|)$
et $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{K} \,/\, \|f\|_\infty < +\infty \}$

Ex 2 Si m désigne la mesure de comptage,
$$\mathcal{L}^p(m) = \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Prop 3 • Inégalité de Hölder
Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

• Inégalité de Minkowski
Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, alors :
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

2) Espaces L^p

<u>Pb</u> : $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un e.v <u>semi-normé</u>. Il manque la propriété $[\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0]$ pour en faire un e.v normé.

<u>Solution</u> on quotiente par $[f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-pp}]$.

Déf 4 $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \{\|\cdot\|_p = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev normé

Th 5 (Riesz-Fischer)
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach] DVPT 1

3) Inclusions des espaces L^p

Prop 6 (a) Si $\mu(X) < +\infty$, alors $0 < p \leq q \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$
(b) Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ alors
$$0 < p \leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

Cex 7 Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ,
on a : $\frac{\mathbb{1}_{]0,1[}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathcal{L}^1(\lambda) \setminus \mathcal{L}^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in \mathcal{L}^2(\lambda) \setminus \mathcal{L}^1(\lambda)$

4) Convergence dans les espaces L^p

<u>Rq</u> Dans Riesz-Fischer on montre que

Prop 8 $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall (f_n) \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $f \in L^p(\mu)$ tq $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$,
il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ tq $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ μ-pp

Cex 9 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$
$\forall n \geq 0$, $\forall 0 \leq k \leq 2^n - 1$, $f_{2^n+k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$.
Alors $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais $f_n \underset{\lambda\text{-pp}}{\not\longrightarrow} 0$

Th 10 (Convergence L^p-dominée, $1 \leq p < \infty$)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions de L^p tq $f_n \xrightarrow[\mu\text{-pp}]{} f$
(a) si $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$, $f \in L^p(\mu)$
(b) si $\exists g \in L^p(\mu)$ tq $|f_n| \leq g$ μ-pp $\forall n$, alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f$

Cex 11 sans domination
$$f_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \mu\text{-pp} \quad \text{et } \forall n, \|f_n\|_1 = 1.$$

5) Densité dans les L^p

Prop 12. • $\forall p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.
• L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$

Th 13 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

(a) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

(b) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

Application 14
- Riemann - Lebesgue
- $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 (utile pour le théorème de Fourier - Plancherel)

II) Utilisation des espaces L^p

1) Convolution

But: Régulariser des fonctions

Déf 15 Si f et g sont deux fonctions quelconques, on appelle produit de convolution de f par g, la fonction (si elle est bien définie) : $(f*g)(x) = \int_X f(y) g(x-y)\, dy$

Th 16 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Pb La convolution par une fonction quelconque de L^1 n'apporte pas de continuité. Mais on a :

Prop 17 Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $f*g$ est bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Si $1 < p < \infty$, $(f*g)(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Prop 18 Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1$, $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$

Déf 19 On appelle suite régularisante une suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ t.q :
- $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$
- $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

Prop 20 Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ ds $L^p(\mathbb{R}^N)$

Cor 21 $\forall \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$

Application 22 Inégalité de Hardy.

$f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$ $\forall x > 0$.

Si $1 < p < +\infty$, $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$ et $Tf \in L^p$.

2) Probabilités

- Lien entre convergence L^p et convergence en proba.

Prop 23 CV $L^p \Rightarrow$ CV en proba

Déf 24 Une famille de v.a $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable si $\lim_{a \to +\infty} \left(\sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > a\}} |X_i|\, dP \right) = 0$

Th 25 $(p \geq 1)$ $(X_n) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^{\mathbb{N}}$ suite de v.a.

Il y a équivalence entre :

(i) $(X_n)_n$ converge dans L^p

(ii) $(|X_n|^p)_n$ est unif. intégrable et $\exists X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_n \xrightarrow[n\infty]{P} X$

Cex 26 pour $n \geq 1$, X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1-\frac{1}{n})\delta_0$

Alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{P} 0$ mais $X_n \not\to 0$ dans L^1

- Martingales

- Soit $p > 1$, $(X_n)_n$ martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_n = (\sigma(X_0, \dots, X_n))_n$

Si $(X_n)_n$ est bornée dans L^p alors (X_n) converge vers X dans L^p et presque sûrement et on a $\forall n$, $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$

- Si $p = 1$, pour que $(X_n)_n$ converge dans L^1 et ps il faut et il suffit que (X_n) soit uniformément intégrable.

III) Le cas particulier de L^2

1) Structure hilbertienne et conséquences

L'application définie sur $L^2 \times L^2$ par $\langle f,g\rangle = \int_X f\bar{g}\,d\mu$ fait de L^2 un espace de Hilbert.

Conséquence L^2 vérifie en particulier la propriété de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation de Riesz.

Applications • définition de l'espérance conditionnelle en probabilité dans le cas de va dans L^2

• caractérisation des fermés de L^P ($1 \leq p < \infty$) avec le théorème suivant :

Th 27 (Grothendieck) [DVPT 2]

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré, μ mesure finie. On se place dans L^p, $1 \leq p < \infty$.

Si F est un sous-espace fermé de L^p et si $F \subset L^\infty$, alors $\dim_{\mathbb{C}} F < +\infty$.

2) $L^2(\mathbb{T})$ et séries de Fourier

But : décrire une fonction comme superposition d'oscillations de fréquences de plus en plus élevées.

Notations : • $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

• $\forall f,g \in L^2(\mathbb{T})$, $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

• $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ où $e_n(x) = e^{inx}$

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e_n$

Th 28 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ et $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

D'où $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application 29 • Inégalité isopérimétrique

• Inégalité de Wirtinger : $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tq $\int_0^{4\pi} f = 0$.

Alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leq \int_0^{4\pi} |f'(t)|^2\,dt$

3) Transformation de Fourier

Déf 30 Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi}\,dt$

Lem 31 $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi\to\pm\infty]{} 0$

Prop 32 • $\forall f,g \in L^1$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$

• si $g(x) = -ixf(x)$ et si $g \in L^1$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = \hat{g}$

Théorème d'inversion :

Si f et $\hat{f}$ sont dans L^1, alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt}\,dt$ pour presque tout x.

Théorème de Plancherel

$L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$, $f \longmapsto \hat{f}$ se prolonge en une isométrie linéaire de L^2

Application : résolution d'équations différentielles.

4) $L^2(I,\rho)$ et polynômes orthogonaux

I intervalle de $\mathbb{R}$.

Déf 33 On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$

$L^2(I,\rho) := L^2(I, \rho(x)dx)$

Prop 34 Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$

Ex 35 Polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$

$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Application Intégration numérique par la méthode de Gauss.