155 — ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE

I. ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE.

[GRi]

1. SOUS-ESPACE PROPRE.

__Cadre__ : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note M la matrice qui représente f dans cette base.

__Def 1.__ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si $v \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(v) = \lambda v$.
Le scalaire λ est dit valeur propre correspondante à v.

__Exemple 2__ : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle θ et de centre O alors si $\theta \neq k\pi$, f n'a pas de vecteurs propres.

__Exemple 3.__ Soit $k \in K$ et $h_k : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto kx \end{array}$ l'homothétie de rapport k. Tout vecteur non nul de E est vecteur propre correspondant à la valeur propre k.

__Def 4.__ $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres.

__Def 5__ : Soit $\lambda \in K$. On note $E_\lambda = \{v \in E \,/\, f(v) = \lambda v\}$ le sous-espace propre correspondant à λ.

__Théorème 6__ : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f.
On a équivalence entre les propriétés suivantes :
i) f est diagonalisable
ii) E est somme directe des espaces propres. $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
iii) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

__Exemple 7__ : Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et
$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & & \vdots \\ a & b & a & & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ Alors A est diagonalisable.

__Corollaire 8__ : Si f a n valeurs propres distinctes alors f est diago.

__Appli 9__ : Décomposition spectrale.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les propositions :
i) s'il existe un système complet de projecteurs $\{P_1, \dots, P_q\}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ 2 à 2 distincts tel que $f = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_q P_q$
ii) f est diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres de f

__Exemple 10.__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $P_1 = \frac{I+A}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \frac{I-A}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^n = P_1 + (-1)^n P_2$

2. DÉCOMPOSITION DE $K[f]$ EN SOUS-ESPACES STABLES.

[OA]

__Def 11__ : Soit F sev de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. F est stable par f si $f(F) \subset F$.

__Exemple 12__ : $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables par f.

__Exemple 13__ : Il existe une infinité de sous-espaces stables par l'endomorphisme f représenté par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

__Lemme 14__ : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$.
Alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

__Exemple 15__ : Soit $P \in K[X]$. Comme $P(f)$ et f commutent, $\mathrm{Ker}\, P(f)$ est stable par f.

__Def 16__ : On considère le morphisme de K-algèbre :
$\varphi_f : \left| \begin{array}{l} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array} \right.$ On définit l'algèbre des polynômes en f $K[f] = \mathrm{Im}\, \varphi_f$.

__Prop-Def 17__ : Il existe un unique polynôme unitaire π_f qui engendre $\mathrm{Ker}\, \varphi_f$: c'est le polynôme minimal de f.

__Remarque 18__ : Si $\pi_f = P_1 \dots P_n$ (décomposition de π_f en produit de facteurs premiers entre eux 2 à 2) alors on a :
$K[f] \simeq K[X]/\langle \pi_f \rangle \simeq K[X]/\langle P_1 \rangle \times \dots \times K[X]/\langle P_n \rangle$

__Théorème 19__ : Soit P un polynôme annulateur de f.
Décomposons P en produits de polynômes $P = Q_1 \dots Q_m$ où les Q_i sont 1ers entre eux. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\, Q_i(f)$

Application 20. Décomposition de Dunford. Si χ_f est scindé alors $\exists!\,(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent tel que $\begin{cases} u = d+n \\ dn = nd \end{cases}$

Prop 21. f est diagonalisable ssi Π_f est scindé à racines simples.

[GOU]

3. DIAGONALISATION PAR BLOCS.

Notation: Si $x\in E$, on note $\Pi_{f,x}$ le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P\in K[X] \,/\, P(f)(x)=0\}$

Lemme 22: Il existe $x\in E$ tel que $\Pi_f = \Pi_{f,x}$.

Def 23: f est cyclique ssi $\exists x\in E$ tel que $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E (ici $\dim E = n$)

Théorème 24. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $E_1,\dots,E_n$ de sev de E tous stables par f telle que

i) $E = E_1\oplus\dots\oplus E_n$

ii) $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, la restriction $f_i = f|_{E_i}$ de l'endomorphisme f au sev E_i est un endomorphisme de E_i cyclique

iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i, on a $P_{i+1} \mid P_i$ $\forall i$

La suite (P_i) ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. Elle est appelée suite d'invariants de similitude

Théorème 25: (Réduction de Frobénius): Si $P_1,\dots,P_n$ désigne la suite des invariants de similitude de $f\in\mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_n)\end{pmatrix}$ où $\mathcal{C}(P_i)$ est la matrice compagnon du polynôme P_i. De plus $\Pi_f = P_1$

Application 26. Réduction de Jordan

Application 27. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

II. RECHERCHE DE POLYNÔMES ANNULATEURS.

1. POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES.

[FGN]

Def 28: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique comme : $\chi_f(X) = \det(f - X\cdot\mathrm{id})$.

Prop 29. On a $\mathrm{Rac}(\chi_f)$ est égal à l'ensemble des valeurs propres de f

Prop 30. Pour tout λ valeur propre de f, on a en notant α la multiplicité de λ dans χ_f que $\dim(E_\lambda)\le\alpha$.

Thm 31: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a f diagonalisable ssi

1) χ_f est scindé : $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$

2) Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ $\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$

Ex 32. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\chi_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$

On a $\dim(E_1)=1$ et $\dim(E_{-2}) = \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right) = 2$

Donc A est diagonalisable

Ex 33: $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\chi_B(X) = -(X-1)^2(X+2)$

On a $\dim(E_{-2})=1$ et $\dim(E_1) = \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-5&0&-2\\0&0&0\\5&1&2\end{pmatrix}\right) = 1 < 2$

Donc B n'est pas diagonalisable

Thm 34 (Cayley-Hamilton). Pour tout $f\in\mathcal{L}(E)$ on a $\chi_f(f)=0$.

Ex 35. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = 2A$ alors A est nilpotente

2) Polynômes annulateurs

[GOU]

Prop 36 Pour tout Q polynôme annulateur de f on a que les valeurs propres de f sont incluses dans les racines de Q.

C-ex 37: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ alors $Q = \Pi_f\times(X-\omega)$, avec ω pas valeur propre de f, Q est un polynôme annulateur de f mais pas toutes ses racines sont des valeurs propres

Thm 38: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a f diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Appli 39 Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{R}$-e.v de dim finie, tel que $f^3+f=0$. Alors $\mathrm{rg}\, f$ est pair.

Ex 40: X^2-X est un polynôme annulateur pour les projecteurs
X^2-1 " " " " symétrie

Appli 41. Dans E un $\mathbb{F}_q$-e.v on a $f\in\mathcal{L}(E)$ diagonalisable ssi X^q-X est annulateur de f

III Étude de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables

OA 1) Diagonalisation simultanée

Prop 42 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dim finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E tq $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout $i, j \in I$.
Si tous les f_i sont diagonalisables. Alors on peut les co-diagonaliser.

Cor 43 La somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est diagonalisable

Appli 44 On a $GL_n(\mathbb{K}) \underset{\text{groupe}}{\simeq} GL_m(\mathbb{K}) \iff n = m$

Ex 45. Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes diagonalisables
Alors $\Phi_{U,V} \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto UM - MV \end{cases}$ est diagonalisable

OA 2) Topologie des endomorphismes diagonalisables

Notations $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
$D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables
$C_n(\mathbb{K})$ " " à valeurs propres distinctes
$T_n(\mathbb{K})$ " " trigonalisables

Rappel En dimension finie les normes sont équivalentes

Prop 46 : Dans $T_n(\mathbb{K})$ on a $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$ et $\mathring{D}_n(\mathbb{K}) = C_n(\mathbb{K})$
(et comme $C_n(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K}) \subset T_n(\mathbb{K})$ on a $\overline{D_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$.)

Rmq 47 $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé distinct de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Gou Appli 48 Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

FG Prop 49. Dans le cas des corps finis on a pour q premier
$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_q = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

3) Cas particulier des endomorphismes normaux SRS

Déf 50 Un endomorphisme f d'un espace hermitien est dit normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$
Une matrice est dite normale si ${}^t\bar{A} A = A\, {}^t\bar{A}$

Ex 51 Les matrices symétriques réelles, antisymétriques réelles, hermitiennes orthogonales ou unitaires sont des matrices normales

Lemme 52 Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien.
Soit λ une valeur propre de f
Alors E_λ est stable par f^* (et f)
et $E_\lambda^\perp$ est stable par f^* et f
De plus $f|_{E_\lambda^\perp}$ est normal

Thm 53. Soit f un endo normal d'un esp hermitien
Alors f est diagonalisable et les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En particulier on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres

Cor 54 Soit f un endo normal d'un espace euclidien E
Alors il existe une base orthonormée B de E dans laquelle
$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & Z_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & Z_s \end{pmatrix}$$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $Z_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

Ex 55 Pour les matrices orthonormales la forme obtenue par le corollaire est
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$ où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

C-ex 56 . Les matrices symétriques complexes ne sont pas forcément normales $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$
. Les matrices antisymétriques complexes aussi $\begin{pmatrix} i & 3i \\ -3i & 2i \end{pmatrix}$