154 — Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : K corps, E K-espace vectoriel de dimension finie

I. Généralités et exemples

1. Définitions [Man p. 15]

Déf 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E. On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$

Ex 2 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par f

Rmq 3 : Si F est stable par $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors F est stable par $f+g$ et $f \circ g$

Prop 4 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in GL(E)$ et F est stable par f, alors $g(F)$ est stable par $g f g^{-1}$

Ex 5 : Si g est une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Δ et f une isométrie, alors $f \circ g \circ f^{-1}$ est une rotation d'axe $f(\Delta)$.

Remarque 6 : Si $E = F \oplus G$ où F, G sont stables par f et B_1, B_2 sont des bases respectives de F et G, et $B = B_1 \cup B_2$, alors $\operatorname{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{B_1}(f_F) & 0 \\ 0 & \operatorname{Mat}_{B_2}(f_G) \end{pmatrix}$

Notation 7 : Si F est stable par f, l'induit de f sur F est $f_F : F \to F$

Prop 8 : Si F est stable par f, $\Pi_{f_F} \mid \Pi_f$ et $\chi_{f_F} \mid \chi_f$

Prop 9 : Si $E = F \oplus G$, F, G stables par f alors $\Pi_f = \operatorname{ppcm}(\Pi_{f_F}, \Pi_{f_G})$

2. Exemples de sous-espaces stables [Man p. 16]

Ex 10 : Si f est une homothétie, tout sev est stable par f

Prop 11 : Soit p projecteur, $F \subset E$ est stable par p ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\operatorname{Im} p$ et d'un sous-espace de $\operatorname{Ker} p$

Ex 12 : Si s est une symétrie, F est stable par s ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\operatorname{Ker}(s-Id)$ et d'un sous-espace de $\operatorname{Ker}(s+Id)$

Ex 13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les sous-espaces stables par $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$, $M \mapsto \operatorname{Tr}(AM) I_n$ sont ceux qui contiennent I_n ou sont inclus dans $H = \{M \mid \operatorname{Tr}(AM) = 0\}$

Prop 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n = \dim E$. Les sous-espaces stables par f sont les $\operatorname{Ker} f^k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

Déf 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$. Le sous-espace cyclique de f associé à x est le plus petit sev stable par f contenant x. On le note $E_{f,x}$

Prop 16 : $E_{f,x} = \operatorname{Vect}(f^k(x), k \in \mathbb{N})$

Prop 17 : $\dim E_{f,x} = \deg \Pi_{f,x}$ où $\Pi_{f,x}$ est l'unique générateur unitaire de $\{P \in K[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ idéal de $K[X]$.

3. Fabrique des sev stables : le lemme des noyaux [OA] [Gou]

Thm 18 [OA 162] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \ldots, P_r \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod P_i\right)(f)\right) = \bigoplus \operatorname{Ker} P_i(f)$

Application 19 : Il existe $x \in E$: $\Pi_{f,x} = \Pi_f$ [OA 165]

Appli 20 : Si F est stable par f et $\Pi_f = \prod P_i^{\alpha_i}$ alors $F = \bigoplus (\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f) \cap F)$

Déf 21 : Si χ_f est scindé sur K, $\chi_f = \prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on appelle $N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i [Gou 191]

Prop 22 : E est somme directe des N_i, $\dim N_i = \alpha_i$ et N_i est stable par f

Thm 23 [Gou 164] : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable ssi χ_f est scindé sur K et pour toute valeur propre λ_i de multiplicité α_i, $\alpha_i = \dim E_{\lambda_i}$

Cor 24 : Si Π_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable

Thm 25 [Gou] : $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur K

Remarque 26 [Gou 166] : Si u est diagonalisable / trigonalisable et F est stable par u, alors u_F est diagonalisable / trigonalisable

Thm 27 [Gou 193] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé sur K. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent et $f = d + n$, $n d = d n$

Appli 28 : Si $f = d + n$ comme dans le théorème, $\exp(f) = \exp(d) \circ \exp(n)$ et il est facile de calculer l'exponentielle d'un diagonalisable / nilpotent

Ex 29 : f est diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(f)$ est diagonalisable (si χ_f est scindé)

4. Supplémentaires stables et dualité

[Gou 169]

Prop 30 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$ est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par $^t u$

où $F^\circ = \{\varphi \in E^* / \varphi_{|F} = 0\}$ est l'orthogonal au sens de la dualité.

Application 32. Si $\varphi \in E^*$ est un vecteur propre de ${}^t u$, alors $(\mathbb{K}\varphi)^\circ = \{y \in E / \forall \varphi \in \mathbb{K}\varphi, \varphi(y) = 0\}$ est un hyperplan de E stable par u.

II. Stabilité et commutation

1. Comportement vis-à-vis des sous-espaces stables

Propo 32 [OA 152] Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors Ker u et Im u sont stables par v.

[Man 26] Ex 33 : ~~Si K est algébriquement clos~~ Les seuls endomorphismes commutant avec tous les éléments de $GL(E)$ sont les homothéties. [Man 26]

[Man 30] Ex 34 : Si p est un projecteur, p commute avec $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi Im(p) et Ker(p) sont stables par u.

2. Réductions simultanées [Fan]

Thm 35 [Fa 191] Soit $(f_i)_{i \in I}$ famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Alors si $\forall i \in I$, f_i est diagonalisable (resp. trigonalisable), il existe une base B de E telle que $\forall i \in I$, $Mat_B(f_i)$ est diagonale (resp. triangulaire).

Ex 36 [Man 75] : Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ est diagonalisable.

Ex 37 [OA 166] Si $f \circ g = g \circ f$, f, g diagonalisables, alors $f+g$ est diagonalisable.

Appli 38 [OA 206] : Si $car(K) \neq 2$, $GL_n(K) \simeq GL_m(K) \Leftrightarrow n = m$.

Appli 39 [OA 206] Si K est algébriquement clos et G un groupe abélien d'ordre n de $GL_n(K)$. Si $n \wedge car(K) = 1$, G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

3. Endomorphismes normaux

Ici $K = \mathbb{R}$, E est euclidien.

Def 40 [Gri 258] $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$ où u^* est l'adjoint de u : $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ $\forall x, y \in E$.

Lemme 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F est stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est stable par u^*.

Remarque 42 : Si u est normal, F stable par u $\Rightarrow$ $F^\perp$ stable par u.

Théorème 43 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Théorème 44 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, il existe une base orthogonale B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$

Application 45 : • Si $u \in O_n(\mathbb{R})$, il existe B orthogonale telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$ et $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

• Si $u^* = u$, $\exists B$ telle que $Mat_B(u)$ soit diagonale à coefficients dans $\mathbb{R}$: théorème spectral pour les endomorphismes symétriques.

Appli 46 : u est normal $\Leftrightarrow$ $u^* \in \mathbb{R}[u]$. [dSP 42]

Appli 47 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $\{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = -1\}$. [dSP 95]

Appli 48 : $\exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective [FGN A3 65]

III. Stabilité et cyclicité

1. Théorème de Jordan [Fan] [H2G2]

Soit A nilpotente, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Lemme 49 : $K_i = \ker A^i$ est un sev stable par A. On note $\nu_i = \dim \ker A^i$.

Prop 50 : La suite $\lambda_i = \nu_i - \nu_{i-1}$ vérifie [illegible]

Théorème 51 (Jordan) : A est semblable à $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$ où $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ bloc de taille k_i [illegible] la classe de similitude de A est caractérisée par la suite (λ_i). [H2G2 [illegible]]

Remarque 52 : On établit la réduction de Jordan de A en construisant le tableau de Young associé à (λ_i) [illegible]

Appli 53 : A et ${}^tA$ sont semblables (pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque).

DVP1

DVP2

2. Réduction de Frobenius [Gou p279]

Déf 54 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $E_{u,x} = E$.

Prop 55 : u est cyclique ssi $\chi_u = \pi_u$ ssi $Mat_B(u) = C_P$ pour $P \in K[X]$ [illegible]

Thm 56 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique famille de polynômes $P_1, \dots, P_r$ [illegible] et $E_1, \dots, E_r$ des sev de E tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ et $\forall i$, E_i est stable par u et $u_{|E_i}$ est cyclique de polynôme minimal P_i. Les P_i sont les invariants de similitude de u.

Corollaire 57 : Il existe une base B telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$

Corollaire 58 : u et v sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont mêmes invariants de similitude.

Remarque 59 : on retrouve la décomposition de Jordan.

Remarque 60 : les invariants de similitude se retrouvent avec le théorème des facteurs invariants de Smith appliqué à $C_P - XI$.

IV. A la recherche d'un supplémentaire stable

1. Stabilité et K[X]-modules [OA p265]

Prop 61 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on munit E d'une structure de $K[X]$-module en posant $P \cdot x = P(u)(x)$. On note (E, u) cette structure. Alors
- un morphisme $\varphi : (E, u) \to (F, v)$ est un $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ u = v \circ \varphi$
- $(E, u) \simeq (F, v)$ en tant que $K[X]$-module ssi u et v sont semblables
- les sous-$K[X]$-modules de (E, u) sont les sev stables par u
- une somme directe de sous-espaces stables est une somme directe de $K[X]$-modules.

2. Semi-simplicité [Gou] [OA]

Déf 62 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *semi-simple* si tout sev stable par u admet un supplémentaire stable.

Théorème 63 : u est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts.

Ex 64 : Si K est algébriquement clos, u est semi-simple ssi il est diagonalisable.

Prop 65 : Si car $K = 0$, u est semi-simple $\Leftrightarrow$ il existe une extension de K [illegible] dans laquelle M est diagonalisable.

Remarque 66 : u est semi-simple $\Leftrightarrow$ (E, u) est un $K[X]$-module semi-simple.

V. Applications en théorie des représentations [Col] [P.Ren]

Déf 67 : Une *représentation* du groupe G est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$ où V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Ex 68 : la représentation de permutation de G est $\rho(g) e_h \mapsto e_{gh}$ où $V = \text{Vect}(e_h, h \in G)$ [239]

Déf 69 : Une sous-représentation de (V, ρ) est un sev de V stable par $\rho(g)$ $\forall g \in G$. On dit que (V, ρ) est *irréductible* s'il n'admet pas de sous-représentation non triviale. [242]

Prop 70 : Soit (V, ρ) représentation de G. Il existe un produit scalaire sur V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tel que $\forall g \in G$, $v_i \in V$, $\langle \rho(g)(v_1), \rho(g)(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Thm 71 (Maschke) : Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles. [244]

Remarque 72 : Si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, le nombre de W_i isomorphes en tant que représentation à W irréductible ne dépend pas de la décomposition en irréductibles de V choisie. [248]

Ex 73 : Si G est abélien, les représentations irréductibles sont de dimension 1.

Prop 74 (Lemme) : Soit G groupe fini de caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_m$. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j \in J} \text{Ker}\, \chi_j$ où $J \subset [\![1, m]\!]$, avec $\text{Ker}\, \chi_i = \{g \in G \,/\, \chi(g) = \chi(e)\}$.

Annexe [H262]

Soit $(\lambda_i)_{1 \le i \le m}$ une suite décroissante d'entiers telle que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n$.

Le diagramme de Young associé à λ est $Y(\lambda)$:

Le diagramme dual Y^* est celui obtenu en intervertissant lignes et colonnes.

Si (λ) est la suite définie dans la proposition 50, $Y^*(\lambda)$ détermine le nombre et la taille des blocs de Jordan.

Ex : $A \in M_{10}(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence 3, $k_1 = 5$, $k_2 = 8$.

Donc $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$

$Y(\lambda)$,

$Y^*(\lambda)$

La réduction de Jordan de A est $\begin{pmatrix} J_3 & & & 0 \\ & J_3 & & \\ & & J_2 & \\ 0 & & & J_1 \; J_1 \end{pmatrix}$

Références

- [Gou] X. Gourdon, Algèbre, 2ème édition
- [OA] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, Objectif Agrégation
- [MaR] R. Mansuy, R. Mneimné, Réduction des endomorphismes
- [Ch] P. Chrétien, Éléments d'analyse et d'algèbre
- [FGNAl3] Francinou Gianella, Oraux X-ENS, Algèbre 3
- [H2G2] Caldero Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries T.1
- [dSP] C. de Seguins Pazzis, Invitation aux formes quadratiques

Invariants de similitude.

On se placera toujours dans E, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension sur un corps quelconque. Génériquement, u désignera un endomorphisme dans $\mathscr{L}(E)$ dont le polynôme minimal est noté Π_u et le polynôme caractéristique χ_u.

Quelques pré-requis.

Définition. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $x \in E$. On appelle *polynôme minimal de u en x* l'unique générateur unitaire de l'idéal

$$\{P \in \mathbf{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}.$$

On le note $\Pi_{u,x}$. On a $\Pi_{u,x} | \Pi_u$.

Proposition. *Il existe $x \in E$ tel que $\Pi_u = \Pi_{u,x}$.*

Preuve. On écrit $\Pi_u = \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$ où P_i sont des irréductibles distincts. On note $K_i = \operatorname{Ker} P_i^{m_i}(u)$ et $u_i = u|_{K_i}$. Par le lemme des noyaux :

$$E = \oplus_i K_i.$$

Montrons le résultat sur chaque sous-espace K_i. Par l'absurde, si le résultat ne tenait pas, alors pour tout $x_i \in K_i$, Π_{u_i,x_i} diviserait strictement $\Pi_{u_i} = P_i^{m_i}$ donc diviserait $P_i^{m_i-1}$ par irréductibilité. Mais alors $P_i^{m_i-1}(u_i)$ serait nul sur tout K_i, ce qui est impossible par minimalité de Π_{u_i}. On dispose donc d'éléments x_i comme dans l'énoncé sur chaque sous-espace K_i. Montrons que $x = x_1 + \ldots + x_r$ convient. On a :

$$0 = \Pi_{u,x}(u)(x) = \sum_i \Pi_{u,x}(x_i)$$

donc $\Pi_{u,x}(u)(x_i) = 0$ puisque les K_i sont en somme directe. Ainsi, $P_i^{m_i} = \Pi_{u_i,x_i} | \Pi_{u,x}$ pour tout i. Puisque les $P_i^{m_i}$ sont premiers entre eux, leur produit qui est égal à Π_u divise aussi $\Pi_{u,x}$, ce qui conclut. $\square$

Ce qu'on va montrer.

Théorème. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe une unique famille $P_1, \ldots, P_r$ de polynômes unitaires et une famille $E_1, \ldots, E_r$ de sous-espaces de E vérifiant :*

(i) $P_r | \ldots | P_1$

(ii) $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$

(iii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, E_i est stable par u et $u_{|E_i}$ est cyclique de polynôme P_i.

Les polynômes $P_1, \ldots . P_r$ sont appelés les invariants de similitudes de u.

PREUVE. Comme d'habitude, on procède par récurrence mais on ne l'écrit pas.

Existence. Soit $d = \deg(\Pi_u)$ et soit $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$. On note :

$$F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)).$$

Bien sûr, F est stable par u et $u_{|F}$ est cyclique. On va montrer par dualité que F admet un supplémentaire stable par u. Soit $\varphi \in E^*$ tel que :

$$\varphi(x) = \varphi\big(u(x)\big) = \ldots = \varphi\big(u^{d-2}(x)\big) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi\big(u^{d-1}(x)\big) = 1.$$

La famille $(\varphi, \varphi \circ u, \ldots, \varphi \circ u^{d-1})$ est une famille libre de E^* et on note Φ le sous-espace vectoriel de E^* engendré par cette famille. On pose alors :

$$G := \Phi^\circ = \{y \in E,\ \forall \psi \in \Phi,\ \psi(y) = 0\}$$

et on montre que c'est un supplémentaire de F stable par u. Il y a trois choses à voir :

- *G est u-stable.* Soit $y \in G$, alors par construction on a déjà :

  $$\forall k \in \{0, \ldots, d-2\},\ \varphi \circ u^k\big(u(y)\big) = 0.$$

  Comme le polynôme minimal de u est de degré d, on a :

  $$u^d(y) \in \mathrm{Vect}\left(y, u(y), \ldots, u^{d-1}(y)\right)$$

  et donc $\varphi \circ u^{d-1}\big(u(y)\big) = \varphi\big(u^d(y)\big) = 0$ par ce qui précède.

- $F \cap G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap G$, alors on peut écrire :

  $$y = a_0 x + \ldots a_{d-1} u^{d-1}(x)$$

  et en appliquant $\varphi \circ u^i$ pour i allant de 0 à $d-1$, on trouve que tous les a_k sont nuls.

- $\dim F + \dim G = n$. C'est une propriété générale de l'orthogonal au sens de la dualité :

  $$\dim \Phi + \dim \Phi^\circ = n.$$

Et bien sûr, $\Pi_{u_{|G}} | \Pi_u$ puisque Π_u annule $u_{|G}$. À une récurrence près, on a achevé la preuve de l'existence.

Unicité. On suppose l'existence d'une autre famille de polynôme $Q_1, \ldots, Q_s$ donnant lieu à une autre décomposition $F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$ comme dans l'énoncé. On a déjà $P_1 = Q_i = \Pi_u$. Soit $j > 1$ l'indice minimal tel que $P_j \neq Q_j$. Alors, on a d'une part :

$$P_j(u)(E) = P_j(u)(E_1) \oplus \ldots \oplus P_j(u)(E_{j-1})$$

et d'autre part :

$$P_j(u)(E) = P_j(u)(F_1) \oplus \ldots \oplus P_j(u)(F_{j-1}) \oplus P_j(u)(F_j) \oplus \ldots \oplus P_j(u)(F_s).$$

Mais pour $i < j$, on a :

$$\dim P_j(u)(E_i) = \dim P_j(u)(F_i)$$

donc

$$0 = \dim P_j(u)(F_j) = \ldots = \dim P_j(u)(G_s)$$

ce qui prouve $Q_j | P_j$ et par symétrie $P_j | Q_j$. C'est absurde car $P_j \neq Q_j$. Finalement $r = s$ et $P_i = Q_i$ pour tout i. □

Corollaire (Décomposition de Frobénius). *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme*

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

où C_{P_i} est la matrice compagnon associée au polynôme P_i avec $P_r | \dots | P_1$. De plus, on a

$$\chi_u = P_1 \dots P_r.$$

Corollaire. *u et v sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.*

Preuve. Si u et v sont semblables, considérer $F_i = \varphi(E_i)$ où E_i sont les sous-espaces associés à u et φ tel que $\varphi \circ u = v \circ \varphi$. Ou alors, reprendre la preuve de l'unicité. □

Corollaire. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors u est semblable à sa transposée.*

Preuve. Il suffit de le montrer pour les endomorphismes cycliques. Le changement de base

$$e'_i = a_1 e_1 + \dots a_{n-i} e_{n-i} + e_{n-i+1}$$

conduit au résultat. □

Corollaire (Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents). *Tout est dans le titre.*

Preuve. Puisque $\chi_u = X^n$, les invariants de similitudes sont de la forme X^{n_i}. □

Trucs à savoir.

- Les invariants de similitude ne dépendent pas du corps de base.
- La théorie des $\mathbf{K}[X]$-modules donne une façon simple pour calculer les invariants de similitude :

  Théorème. *Si U est la matrice de $u \in \mathscr{L}(E)$ dans une certaine base, alors les invariants de similitude de u sont les facteurs invariants non inversibles de la matrice $U - XI_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}[X])$.*

  Preuve. On montre par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qu'une matrice de la forme $C_P - XI$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & P \end{pmatrix}$$

  et on utilise la décomposition de Frobenius pour conclure. □

Références.
H2G2
X. Gourdon, *Algèbre*
V. Beck, J, Malick, G. Peyré, *Objectif agrégation*

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Autour des endomorphismes semi-simples.

On se place dans E, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple lorsque tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Lemme. *Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension de corps. Alors $\Pi_{f,\mathbf{K}} = \Pi_{f,\mathbf{L}}$.*

Preuve. C'est une conséquence de l'indépendance du rang vis à vis du corps de base (qui provient de l'indépendance du résultat du calcul des mineurs). Maintenant, on a déjà :

$$\Pi_{f,\mathbf{L}} | \Pi_{f,\mathbf{K}}$$

et comme ces polynômes sont unitaires, il suffit de montrer qu'ils sont de même degré pour conclure. Or, le degré du polynôme minimal de f sur $\mathbf{L}$ est égal au rang de la famille $(id, f, \dots, f^{n-1})$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un espace vectoriel de dimension finie n^2. Comme le rang ne dépend pas du corps de base et quitte à tout mettre dans une grosse matrice, on en déduit l'égalité annoncée. $\square$

Lemme. *Soit F un sous-espace stable par f. On note $\Pi_f = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. On a :*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big[\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f) \cap F \Big].$$

Preuve. Par le lemme des noyaux, on sait que :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f|_F) = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big[\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f) \cap F \Big]$$

$\square$

Théorème. *Un endomorphisme f est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal Π_f est un produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.*

Preuve. Progressivement :

Étape 1. Lorsque Π_f est irréductible.

On va montrer que f est semi-simple, considérons donc F un sous-espace stable par f. Si $F = E$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $x \in E \setminus F$ et

$$E_x = \{P(f)(x),\ P \in \mathbf{K}[X]\}.$$

Clairement E_x est stable par f. Pour conclure et quitte à itérer le processus, il suffit de montrer que

$$F \text{ et } E_x \textbf{ sont en somme directe.}$$

L'idéal $I_x = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(f)(x) = 0\}$ est non réduit à 0 (il y a Π_f) et principal donc il est engendré par un unique polynôme unitaire Π_x. Comme $\Pi_x | \Pi_f$, ce polynôme est irréductible.

Soit $y = P(f)(x) \in E_x \cap F$ que l'on suppose non nul. Alors $P \notin I_x$, c'est à dire que Π_x ne divise pas P et comme il est irréductible, P et Π_x sont premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, on peut écrire :

$$UP + V\Pi_x = 1.$$

On trouve :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) = U(f)(y) \in F \quad \text{car} \quad y \in F.$$

C'est absurde !

Étape 2. Cas général, condition nécéssaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme semi-simple de polynôme minimal $\Pi_f = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Supposons qu'il existe $\alpha_i \geq 2$. On écrit alors $\Pi_f = P^2 Q$.

$F = \operatorname{Ker} P(f)$ est un sous-espace stable par f qui admet un supplémentaire stable noté S. Si $x \in S$, alors
- $\Pi_f(f)(x) = P(f)P(f)Q(f)(x) = 0$ donc $P(f)Q(f)(x) \in F$.
- S est stable par f donc $P(f)Q(f)(x) \in S$.

Finalement, $P(f)Q(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$ et $P(f)Q(f)$ s'annule sur S.

Mais $P(f)Q(f) = Q(f)P(f)$ donc par définition de F, $P(f)Q(f)$ s'annule aussi sur F. Puisque F et S sont supplémentaires, le polynôme PQ annule f ce qui contredit la minimalité de Π_f.

Étape 3. Cas général, condition suffisante.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est de la forme $\Pi_f = P_1 \dots P_r$ où les P_i sont des polynômes irréductibles distincts. Soit F un sous-espace stable par f. Pour tout $i \in \{1, \dots r\}$, $F \cap \operatorname{Ker} P_i(f)$ est stable par $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$. Puisque P_i est un polynôme irréductible qui annule $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$, c'est le polynôme minimal de $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$. La première étape fournit l'existence d'un sous-espace S_i stable par $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$ (donc par f) tel que :

$$\operatorname{Ker} P_i(f) = (F \cap \operatorname{Ker} P_i(f)) \cap S_i.$$

Il suffit d'écrire :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \left[F \cap \operatorname{Ker} P_i(f) \oplus S_i \right] = \left[\bigoplus_{i=1}^{r} \Big(F \cap \operatorname{Ker} P_i(f) \Big) \right] \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} S_i = F \oplus S$$

et S est stable par f qui est donc semi-simple. $\square$

Lorsque $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de degré 1 donc f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable. On note maintenant M la matrice de f dans une base et on dit qu'elle est semi-simple lorsque f l'est.

Théorème. *Si le corps* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle, alors* M *est semi-simple si et seulement s'il existe une extension* $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ *dans laquelle* M *est diagonalisable.*

PREUVE. Soit $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle et $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension de corps. On commence par montrer que M est semi-simple sur $\mathbf{K}$ si et seulement si M l'est sur $\mathbf{L}$ (ici, M est à coefficients dans $\mathbf{K}$). Le polynôme minimal de M sur $\mathbf{K}$ est le même que celui de M sur $\mathbf{L}$. Il suffit donc de montrer que Π_M est sans facteur carré dans $\mathbf{K}[X]$ si et seulement s'il est sans facteur carré dans $\mathbf{L}[X]$.

Dans un corps de caractéristique nulle, P est sans facteur carré équivaut à $P \wedge P' = 1$. Mais comme le calcul du pgcd s'effectue dans $\mathbf{K}$, le fait que P et P' soient premiers entre eux ne dépend pas du corps considéré.

Prouvons le théorème : supposons que M est semi-simple dans $\mathbf{K}$. Alors soit $\mathbf{L}$ est un corps de décomposition de $\Pi_M \in \mathbf{K}[X]$. Dans $\mathbf{L}[X]$, le polynôme Π_M est scindé à racines simples donc M est diagonalisable. Réciproquement, si M est diagonalisable dans $\mathbf{L}$ alors M est semi-simple dans $\mathbf{L}$ et on vient de montrer que ce fait était équivalent à la semi-simplicité de M sur $\mathbf{K}$. $\square$

Références.

X. Gourdon, *Algèbre*
V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*

122 Anneaux principaux. Applications.
141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).