157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Cadre : K corps. E un K-ev de dimension finie n.

I endomorphismes trigonalisables.

1- Notion de trigonalisation

def1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit trigonalisable si il existe une base B de E où $\mathrm{Mat}_B(f)$ est triangulaire supérieure. Une matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

rem 2 Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure, il est donc inutile de préciser inférieur ou supérieur dans la trigonalisabilité.

prop 3 $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque de E l'est.

ex 4 tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.

thm 5 $f \in \mathcal{L}(E)$: on a équivalence : i) f est trigonalisable
ii) il existe un polynôme annulateur de f scindé sur K
iii) Π_f est scindé sur K
iv) χ_f est scindé sur K.

rem 6 Si K est algébriquement clos, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

cex 7 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{C}$.

prop 8 $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, F sev de E stable par f, alors $f_{|F}$ est trigonalisable.

prop 9 $A \in M_n(K)$ trigonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes). Alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

App 10 Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\exp(\mathrm{Tr} A) = \det(\exp A)$.

App 11 $A \in M_n(K)$ trigonalisable, $P \in K[X]$, alors $Sp(P(A)) = P(Sp(A))$.

Cex 12 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A^2) = \{-1\}$

2- trigonalisation simultanée.

prop 13 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = f \circ g$, alors i) Tout s-e-p de f est stable par g
ii) Im f est stable par g.

thm 14 (trigonalisation simultanée) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E telle que $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ pour tout $i, j \in I$. Si tous les f_i sont trigonalisables, on peut cotrigonaliser la famille $(f_i)_{i \in I}$ i.e. il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes triangulaires.

Cex 15 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont simultanément trigonalisables mais ne commutent pas

prop 16 La somme d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est trigonalisable.

App 17 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, alors $\phi_{A,B} \left| \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto AM - MB \end{array} \right.$ est trigonalisable.

II Endomorphismes nilpotents.

1- Nilpotence et caractérisation

def 18 f est dit nilpotent si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$. On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$. $A \in M_n(K)$ est nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$.

prop 19 $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent ssi la matrice de f dans une base quelconque de E est nilpotente.

ex 20 • $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente dans $M_3(\mathbb{R})$

• Si $A \in M_n(K)$ est nilpotente alors $\phi_A \left| \begin{array}{l} M_n(K) \to M_n(K) \\ M \to AM \end{array} \right.$ est nilpotent.

• la dérivation dans $K_n[X]$ est nilpotente.

def 21 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent. L'indice de nilpotence de f est l'exposant de la plus petite puissance nulle de f.

prop 22 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f nilpotent d'indice p ssi $\Pi_f = X^p$ où $p \leq \dim E$.

thm 23 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence : i) f est nilpotent
ii) $\chi_f = (-1)^n X^n$
iii) $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\Pi_f = X^p$
iv) f est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale
v) f est trigonalisable et sa seule vap est 0
vi) 0 est la seule valeur propre de f dans toute extension algébrique de K.

Cex 24 Une matrice ayant pour seule valeur propre 0 n'est pas nécessairement nilpotente : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente et admet 0 comme seule valeur propre réelle.

C-Ex 24 : Une matrice de seule valeur propre 0 n'est pas forcément nilpotente : $A = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente, mais $\chi_A(x) = -x(x^2+1)$ a 0 pour seule racine réelle.

Prop 25 : On suppose que $car(\mathbb{K}) = 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a : f nilpotent ssi $(\forall k \in \mathbb{N},\ Tr(f^k) = 0)$

C-Ex 26 : En caractéristique $p \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_p{}^k$ est de trace nulle, mais I_p n'est pas nilpotente.

Prop 27 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev de E stable par f. Alors : f est nilpotent ssi $f_{|F}$ et $\bar{f}$ sont nilpotent, où $\bar{f} : E/_F \to E/_F$ est obtenue par passage au quotient.

2) Nature du cône nilpotent

Prop 28 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λf est aussi nilpotent. $\mathcal{N}(E)$ est donc un cône.

Rem 29 : $\mathcal{N}(E)$ n'est pas stable par addition : $A = \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0\\1&0 \end{pmatrix}$ est inversible, donc pas nilpotente, mais est somme de deux matrices nilpotentes.

Ex 30 : Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. On a $\chi_A(x) = X^2 - Tr(A)X + \det A$.
Donc : A nilpotente ssi $Tr\, A = \det A = 0$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut dessiner $\mathcal{N}(E)$ en le représentant dans l'ev de dimension 3 des matrices de trace nulle (cf annexe).

Prop 31 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
- Si f, g sont nilpotents et commuttent, alors $f+g$ est nilpotent.
- Si g est nilpotent et si f, g commuttent, alors $f \circ g = g \circ f$ est nilpotent.

Thm 32 : $Vect(\mathcal{N}(E)) = \ker(Tr) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ tr\, f = 0\}$.

DEV 1

Lem 33 : Soit E un $\mathbb{F}_q$-ev de dimension d. Soient $e \in E \setminus \{0\}$ et $N \in \mathcal{N}(E)$. Alors il existe un unique r maximal tel que la famille $\mathcal{E} = (e, Ne, \dots, N^{r-1}e)$ soit libre, et $N^r e = 0$.

Thm 34 (Cardinal du cône nilpotent) On a $n_d := |\mathcal{N}(E)| = q^{d(d-1)}$

3) Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

déf 35 : Un bloc de Jordan est une matrice définie par :
$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K})$ (bloc de Jordan associé à $\lambda \in \mathbb{K}$).

déf 36 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle suite des noyaux itérés de f la suite croissante $(\ker(f^i))_{i \in \mathbb{N}}$

Prop 37 :
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\ker(f^i)$ est stable par f.
- la suite $(\dim(\ker(f^{i+1})) - \dim(\ker(f^i)))_{i \in \mathbb{N}}$ des sauts de dimension est décroissante et positive
- Soit $j \in \mathbb{N}$. Si $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1})$, alors : $\forall i \geq j$, $\ker(f^i) = \ker(f^j)$. En particulier, la suite des noyaux itérés de f est stationnaire.

Rem 38 (injections de Frobenius)
On appelle injections de Frobenius relativement à $f \in \mathcal{L}(E)$ les applications F_i définies pour $i \geq 2$ par la propriété universelle du quotient :

$$\begin{tikzcd} \ker(f^i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{i-1}"'] & \ker(f^{i-1}) \arrow[d, "\pi_{i-2}"] \\ \ker(f^i)/_{\ker(f^{i-1})} \arrow[r, dashed, "F_i"] & \ker(f^{i-1})/_{\ker(f^{i-2})} \end{tikzcd}$$

Thm 39 (Réduction de Jordan pour les nilpotents)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors il existe une famille d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de Jordan : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & J_{n_2}(0) & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_p}(0) \end{pmatrix}$
De plus, il y a unicité des n_i.
On appelle cette matrice la réduite de Jordan de f.

App 40 : $f, g \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents sont semblables ssi f et g ont la même réduite de Jordan.

C-Ex 41 : $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Rem 42 :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. L'indice de nilpotence de f est la plus grande des tailles des blocs de Jordan de sa réduite.
- La dimension du noyau de f est égale au nombre de blocs de Jordan, soit la somme des $\nu_i(f)$, où $\nu_i(f)$ est le nombre de blocs de Jordan de f de taille $i \in \{n_1, \dots, n_p\}$.

Plus précisément, on a $\nu_j(f) = 2\dim \ker(f^j) - \dim \ker(f^{j-1}) - \dim \ker(f^{j+1})$

Prop 43 : Si $car(\mathbb{K}) = 0$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a : f nilpotent ssi $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, f et λf sont semblables.

4) Généralisation des nilpotents : endomorphismes cycliques

déf 44 : Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0 \in \mathbb{K}[X]$ unitaire.
On définit sa matrice compagnon par $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

déf 45 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tq $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Thm 46 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :
(i) f est cyclique $\iff$ (ii) $(-1)^n \chi_f = \pi_f$ $\iff$ (iii) $\deg(\pi_f) = n$
$\iff$ (iv) il existe une base B de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est compagnon.
$\iff$ (v) $\dim(\mathbb{K}[f]) = n$.

Prop 47 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :
(i) $\exists$ une base B de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est un bloc de Jordan J_n
$\iff$ (ii) f est nilpotent et cyclique $\iff$ (iii) f est nilpotent d'indice n
$\iff$ (iv) f est nilpotent de rang $n-1$.

III - RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLES

1) Sous-espaces caractéristiques

Thm 48 (lemme des noyaux) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $Q(X) = Q_1(X) \dots Q_p(X)$, où : $\forall i,j \in \{1,\dots,p\}, i \neq j, Q_i \wedge Q_j = 1$. Si $Q(f) = 0$, alors : $E = \ker Q_1(f) \oplus \dots \oplus \ker Q_p(f)$.

Déf 49 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. On appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i de f le sev $N_{\lambda_i} := \ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$, où α_i est la multiplicité de λ_i dans χ_f.

Thm 50 (Réduction selon les sous-espaces caractéristiques) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Alors il existe une base $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_p\}$ de E, où B_i est une base de N_{λ_i}, telle que
$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & * \\ & \lambda_1\end{matrix}}_{\alpha_1} & & & 0 \\ & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_2 & * \\ & \lambda_2\end{matrix}}_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\begin{matrix}\lambda_p & * \\ & \lambda_p\end{matrix}}_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

Ex 51 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\chi_A(x) = x^2(x-1)^2$. Avec $N_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $N_0 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

App 52 : Calcul de la puissance d'une matrice.

2) Décomposition de Dunford-Chevalley-Jordan

DEV 2

Prop 53 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $F \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f, $F = \beta H_1^{\alpha_1} \dots H_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. $\forall i \in \{1,\dots,s\}$, $N_i := \ker H_i^{\alpha_i}(f)$.
Alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et $\forall i \in \{1,\dots,s\}$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Thm 54 (Dunford) : On note $n := \dim(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : (i) d diagonalisable et n nilpotent ; (ii) $f = d + n$ et $dn = nd$. De plus, d et n sont des polynômes en f.

App 55 (exponentielle de matrices) Soit $f = d + n$ la décomposition de Dunford de $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exp(f) = \exp(d)\exp(n) = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \times \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n^k}{k!}$
où q est l'indice de nilpotence de n.

Ex 56 : La décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Réduction de Jordan

Thm 57 (Réduction de Jordan) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Il existe une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{K}^l$ d'éléments deux à deux distincts et : $\forall i \in [\![1,l]\!]$, il existe $j_i \in \mathbb{N}$ et des entiers $m_{i,1} \geq m_{i,2} \geq \dots \geq m_{i,j_i} > 0$ tels qu'il existe une base B de E dans laquelle $Mat_B(f)$ est diagonale par blocs de Jordan :
$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} J_{m_{1,1}}(\lambda_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{m_{1,j_1}}(\lambda_1) & & & \\ & & & J_{m_{l,1}}(\lambda_l) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & J_{m_{l,j_l}}(\lambda_l) \end{pmatrix}$$
et cette expression est unique à l'ordre des blocs près.

Ex 58 : Si $\dim E = 5$, $\chi_f(x) = -(x-\lambda)^5$, $\pi_f(x) = (x-\lambda)^3$ et $\dim E_\lambda(f) = 3$: il existe une base B de E tq $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Coro 59 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisables. A, B sont semblables ssi elles ont la même réduite de Jordan (à l'ordre des blocs près).

Rem 60 : Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable : l'ensemble des v.p. (avec leurs multiplicités) et les dimensions des blocs de Jordan associées à chaque valeur propre forment un système complet d'invariants.

4) Réduction de Frobenius

Not. 61 : Soit $x \in E$. On note, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0\}$.

Prop 62 : $\exists x \in E$, $P_x = \pi_f$.

Thm 63 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sev de E stables par f tels que :
(i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
(ii) $\forall i \in \{1,\dots,r\}$. $f_i := f|_{F_i} \in \mathcal{L}(F_i)$ est cyclique
(iii) Si $P_i := \pi_{f_i}$ alors : $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,r-1\}$.
La suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Thm 64 (Réduction de Frobenius) Si $P_1, \dots, P_r$ est la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base B de E tq $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$, et $\begin{cases} P_1 = \pi_f \\ (-1)^n \chi_f = P_1 \dots P_r \end{cases}$

Coro 65 : $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables $\iff$ ils ont les mêmes invariants de similitude.

Rem 66 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Comme un bloc de Jordan est cyclique, la réduite de Jordan de f correspond à sa réduite de Frobenius. Les invariants de similitude de f sont les X^{m_j}.

BIBLIO

- Gourdon algèbre
- R. Goblot, algèbre linéaire
- H_2G_2 tome 2
- Mneimné, Réduction des endomorphismes
- Grifone
- Objectif agrégation
- Berhuy : Algèbre, le grand combat

Annexe